



## COMUNE DI PISA

Provincia di Pisa



### ADEGUAMENTO DELL'IMPIANTO DI DEPURAZIONE DI PISA NORD - S. JACOPO II STRALCIO

#### RELAZIONE TECNICA DI CALCOLO DELLE STRUTTURE

#### Allegato 2 – Manuali di validazione dei software di calcolo

Data :

Dicembre 2014

<i>Committente:</i> Dott. Ing. Roberto CECCHINI	<i>Progettisti:</i> Dott. Ing. Giovanni SIMONELLI Dott. Ing. Simone FRANCHINI		<i>CSP:</i> Dott. Ing. Simone FRANCHINI	
<i>Responsabile di Commessa:</i> Dott. Ing. Claudio LASTRAIOLI	<i>Collaboratori tecnici :</i>			
	<i>Opere idrauliche e di processo, impiantistica</i>  Dott. Ing. Robi NOVELLI Dott. Ing. Fabrizio MANCUSO Dott. Ing. Simone LIPPI	<i>Opere strutturali</i>  A.I.C.E.Consulting Srl Dott. Ing. Domenico DARDANO	<i>Opere geotecniche</i>  Dott. Geol. Carlo FERRI	<i>Opere elettriche ed automazione</i>  CUBO Progetti Dott. Ing. Carmine MIULLI

Indice rev.	Data	Oggetto	Controllato	Approvato

0	Dicembre 2014	Prima emissione	FR	BP	DD
Revisione	Data	Descrizione	Redatto	Verificato	Validato

## INDICE

1	SOMMARIO .....	5
---	----------------	---





## 1 SOMMARIO

La presente relazione riporta in sequenza tutta la documentazione di validazione a corredo dei software utilizzati per le verifiche delle strutture nell'ambito del progetto della vasca di stabilizzazione dei fanghi (corpo "I") e al locale tecnico adiacente e al pozzetto ripartitore, da realizzarsi nell'ambito dell'intervento di ampliamento dell'impianto di depurazione di "Pisa Nord" sito in località San Jacopo nel Comune di Pisa.

In particolare si tratta dei seguenti codici di calcolo:

- a) **ModeST 8.5** sviluppato dalla *Tecnisoft S.r.l. di Prato (FI)* (utilizzato per la modellazione del locale tecnico);
- b) **Xfinest 2012** sviluppato dalla società *HERPACEAS s.r.l. di Milano*, post-processore di ModeST 8.2.
- c) **Straus7 Release 2.3.6**, , realizzato dalla *G+D Compting Pty Ltd, Australia* ([www.straus7.com](http://www.straus7.com)) (utilizzato per la modellazione della vasca);
- d) **Paratie Plus 2012 (versione 10.3.1.0)** prodotto da **C.e.A.S.** e distribuito da **Harpaceas**. (utilizzato per la modellazione dei diaframmi nella fase di scavo);

**ALLEGATO 01**

**MANUALE DI VALIDAZIONE DEL SOFTWARE**

**MODEST 8.5**



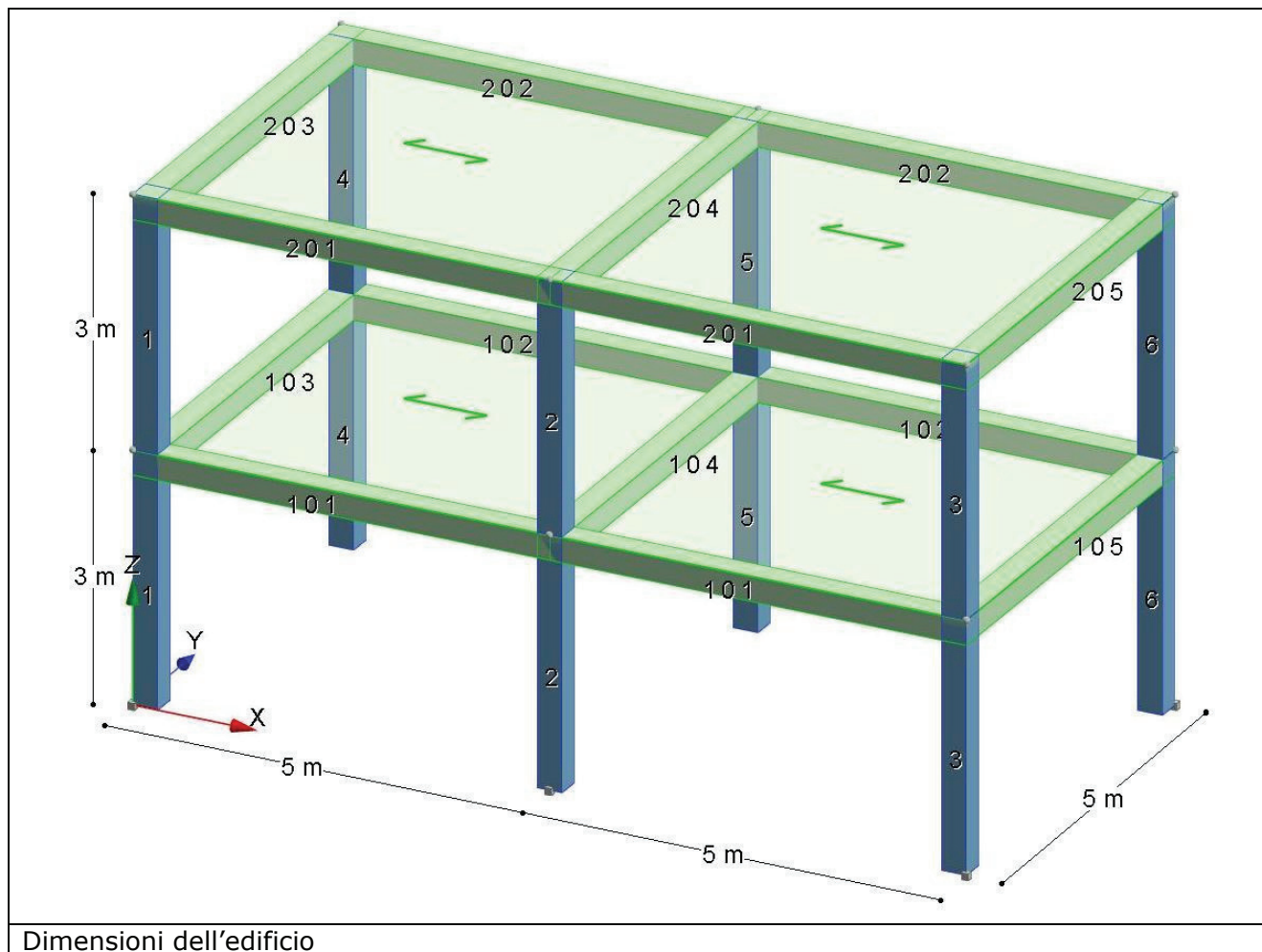
## MANUALE DI VALIDAZIONE PER IL D.M. 14/01/08

## INDICE

Analisi dei carichi per un'analisi sismica statica lineare, ai sensi del D.M. 08, di un edificio in c.a.....	1
Verifica di una trave in c.a. ....	7
Calcolo dei momenti di progetto in gerarchia di resistenze per i pilastri di una struttura a telai in c.a. ....	15
Analisi sismica statica non lineare delle murature .....	18
Verifiche geotecniche di una fondazione superficiale.....	22
Verifiche geotecniche di una fondazione profonda.....	30
Verifica di un'asta in acciaio .....	35
Verifica di un'asta in legno .....	43

# Analisi dei carichi per un'analisi sismica statica lineare, ai sensi del D.M. 08, di un edificio in c.a.

**Caratteristiche dell'edificio:** le dimensioni sono indicate nella seguente figura, sia travi che pilastri hanno sezioni di dimensioni 30 x 30 cm.



Il peso proprio dei solai da un carico permanente strutturale pari a  $350 \text{ kg/m}^2$  e un carico permanente non strutturale pari a  $150 \text{ kg/m}^2$ . Il sovraccarico agente sul primo impalcato è pari a  $200 \text{ kg/m}^2$ , è definito come "Variabili Categoria A Ambienti ad uso residenziale" ed è ipotizzato come azione variabile dominante. Il sovraccarico agente sul secondo impalcato è pari a  $100 \text{ kg/m}^2$ , è definito come "Variabili Neve (a quota  $\leq 1000 \text{ m s.l.m.}$ )" ed è ipotizzato come azione variabile contemporanea alla dominante. Sulle travi perimetrali del primo impalcato grava un carico permanente non strutturale di  $1000 \text{ kg/m}$  dovuto ai tamponamenti.

L'opera è di tipo ordinario, con vita nominale di 50 anni, ed ha classe d'uso II. L'edificio, regolare sia in pianta che in altezza, viene progettato in classe di duttilità "B" e la sua tipologia è di "edificio in c.a. a più piani e più campate" per azione del sisma in direzione X e di "edificio in c.a. a più piani ed una campata" per azione del sisma in direzione Y. Per la struttura in esame non vengono tenuti in conto gli effetti dovuti alle non linearità geometriche. Il sito di costruzione è in Via Ferrucci 203 Prato: lon. 11.11370 lat. 43.86530; il suolo di fondazione è di categoria "A" e la categoria topografica è "T1 - Superficie pianeggiante, pendii e rilievi isolati con inclinazione media  $i \leq 15^\circ$ ".

**File:** [TestValidazione] - TVDM08CA

## Analisi teorica:

## Generazione delle combinazioni di carico:

Le condizioni di carico elementari considerate sono:

1	permanenti strutturali	[CCE1]
2	permanenti non strutturali	[CCE2]
3	variabili imp. 1	[CCE3]
4	variabili imp. 2	[CCE4]
5	forze conv. in dir.X	
6	forze conv. in dir.Y	
7	sisma torcente	
8	sisma in dir.X	
9	sisma in dir.Y	

Le combinazioni di carico sismico risultano:

$$E + G_1 + G_2 + P + \Psi_{21}Q_{k1} + \Psi_{22}Q_{k2}$$

In cui:

$$E = \text{azione sismica} ; P = 0$$

$$G_1 = [CCE1] ; G_2 = [CCE2] ; Q_{k1} = [CCE3] ; Q_{k2} = [CCE4]$$

$$\Psi_{21} = 0.3 ; \Psi_{22} = 0.0$$

L'azione sismica viene considerata combinando separatamente, per le due direzioni e i due versi di applicazione, i massimi ottenuti, col 30% dei massimi ottenuti per l'azione applicata nell'altra direzione in entrambi i versi di applicazione. Agli effetti di tali combinazioni viene sommato l'effetto del sisma torcente, sia con segno positivo che negativo. L'azione sismica verticale non viene considerata. Risultano 16 (2x2x2x2) combinazioni di carico per ogni stato limite sismico. Le prestazioni attese per struttura in oggetto devono essere verificate nei confronti delle azioni sismiche relative agli stati limite di danno (SLD) ed agli stati limite di vita (SLV), risulta quindi un totale di 32 combinazioni di carico in ambiente sismico.

Le combinazioni di carico statico risultano:

Combinazione fondamentale (SLU):

$$\gamma_{G1}G_1 + \gamma_{G2}G_2 + \gamma_P P + \gamma_{Q1}Q_{k1} + \gamma_{Q2}\Psi_{02}Q_{k2}$$

Combinazione caratteristica (rara) (SLE R):

$$G_1 + G_2 + P + Q_{k1} + \Psi_{02}Q_{k2}$$

Combinazione frequente (SLE F):

$$G_1 + G_2 + P + \Psi_{11}Q_{k1} + \Psi_{22}Q_{k2}$$

Combinazione quasi permanente (SLE Q):

$$G_1 + G_2 + P + \Psi_{21}Q_{k1} + \Psi_{22}Q_{k2}$$

In cui:

$$E = \text{azione sismica} ; P = 0$$

$$G_1 = [CCE1] ; G_2 = [CCE2] ; Q_{k1} = [CCE3] ; Q_{k2} = [CCE4]$$

$$\gamma_{G1} = 1.3 ; \gamma_{G2} = 1.5 ; \gamma_{Q1} = \gamma_{Q2} = 1.5$$

$$\Psi_{11} = 0.5 ; \Psi_{21} = 0.3 ; \Psi_{02} = 0.5 ; \Psi_{22} = 0.0$$

All'effetto dell'azione dei carichi statici viene sommato l'effetto delle forze orizzontali convenzionali nei due versi e nelle due direzioni di applicazione. Risultano quindi 16

combinazioni statiche: 4 combinazioni di carico per ogni combinazione dei 4 stati limite statici.

Per i carichi definiti le combinazioni risultano:

SLV SLD	$1.00*[CCE1] + 1.00*[CCE2] + 0.30*[CCE3] + 0.00*[CCE4]$
SLU	$1.30*[CCE1] + 1.50*[CCE2] + 1.50*[CCE3] + 0.75*[CCE4]$
SLE R	$1.00*[CCE1] + 1.00*[CCE2] + 1.00*[CCE3] + 0.50*[CCE4]$
SLE F	$1.00*[CCE1] + 1.00*[CCE2] + 0.50*[CCE3] + 0.00*[CCE4]$
SLE Q	$1.00*[CCE1] + 1.00*[CCE2] + 0.30*[CCE3] + 0.00*[CCE4]$

La matrice delle combinazioni di carico risulta pertanto:

		Condizioni di carico elementari								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Combinazioni di carico generate	1 SLV	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	1.00	1.00	0.30
	2 SLD	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	1.00	1.00	0.30
	3 SLV	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	1.00	1.00	-0.30
	4 SLD	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	1.00	1.00	-0.30
	5 SLV	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	1.00	-1.00	0.30
	6 SLD	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	1.00	-1.00	0.30
	7 SLV	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	1.00	-1.00	-0.30
	8 SLD	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	1.00	-1.00	-0.30
	9 SLV	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	1.00	0.30	1.00
	10 SLD	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	1.00	0.30	1.00
	11 SLV	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	1.00	-0.30	1.00
	12 SLD	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	1.00	-0.30	1.00
	13 SLV	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	1.00	0.30	-1.00
	14 SLD	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	1.00	0.30	-1.00
	15 SLV	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	1.00	-0.30	-1.00
	16 SLD	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	1.00	-0.30	-1.00
	17 SLV	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	-1.00	1.00	0.30
	18 SLD	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	-1.00	1.00	0.30
	19 SLV	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	-1.00	1.00	-0.30
	20 SLD	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	-1.00	1.00	-0.30
	21 SLV	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	-1.00	-1.00	0.30
	22 SLD	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	-1.00	-1.00	0.30
	23 SLV	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	-1.00	-1.00	-0.30
	24 SLD	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	-1.00	-1.00	-0.30
	25 SLV	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	-1.00	0.30	1.00
	26 SLD	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	-1.00	0.30	1.00
	27 SLV	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	-1.00	-0.30	1.00
	28 SLD	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	-1.00	-0.30	1.00
	29 SLV	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	-1.00	0.30	-1.00
	30 SLD	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	-1.00	0.30	-1.00
	31 SLV	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	-1.00	-0.30	-1.00
	32 SLD	1.00	1.00	0.30	0.00	-	-	-1.00	-0.30	-1.00
	33 SLU	1.30	1.50	1.50	0.75	1.00	0.00	-	-	-
	34 SLU	1.30	1.50	1.50	0.75	-1.00	0.00	-	-	-
	35 SLU	1.30	1.50	1.50	0.75	0.00	1.00	-	-	-
	36 SLU	1.30	1.50	1.50	0.75	0.00	-1.00	-	-	-
	37 SLR	1.00	1.00	1.00	0.50	1.00	0.00	-	-	-
	38 SLR	1.00	1.00	1.00	0.50	-1.00	0.00	-	-	-
	39 SLR	1.00	1.00	1.00	0.50	0.00	1.00	-	-	-
	40 SLR	1.00	1.00	1.00	0.50	0.00	-1.00	-	-	-
	41 SLF	1.00	1.00	0.50	0.00	1.00	0.00	-	-	-
	42 SLF	1.00	1.00	0.50	0.00	-1.00	0.00	-	-	-
	43 SLF	1.00	1.00	0.50	0.00	0.00	1.00	-	-	-
	44 SLF	1.00	1.00	0.50	0.00	0.00	-1.00	-	-	-
	45 SLQ	1.00	1.00	0.30	0.00	1.00	0.00	-	-	-
	46 SLQ	1.00	1.00	0.30	0.00	-1.00	0.00	-	-	-
	47 SLQ	1.00	1.00	0.30	0.00	0.00	1.00	-	-	-
	48 SLQ	1.00	1.00	0.30	0.00	0.00	-1.00	-	-	-

### Azione sismica statica:

Per le combinazioni sismiche i pesi e le masse associate ai due impalcati risultano:

$$\begin{aligned}W_{1\text{travi}} &= 1.0 \cdot [7 \cdot (0.30 \cdot 0.30 \cdot 5.00) \cdot 2500] = 7875.00 \text{ kg(f)} \\W_{1\text{pilastri}} &= 1.0 \cdot [6 \cdot (0.30 \cdot 0.30 \cdot 3.00) \cdot 2500] = 4050.00 \text{ kg(f)} \\W_{1\text{QPS sol}} &= 1.0 \cdot [5.00 \cdot 10.00 \cdot 350] = 17500.00 \text{ kg(f)} \\W_{1\text{QPN sol}} &= 1.0 \cdot [5.00 \cdot 10.00 \cdot 150] = 7500.00 \text{ kg(f)} \\W_{1\text{tamp}} &= 1.0 \cdot [6 \cdot 5.00 \cdot 1000] = 30000.00 \text{ kg(f)} \\W_{1\text{QA sol}} &= 0.3 \cdot [5.00 \cdot 10.00 \cdot 200] = 3000.00 \text{ kg(f)} \\W_1 &= 69925.00 \text{ kg(f)} \\MS_1 &= 15950.00/9.81 = 7127.93 \text{ kg(m)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_{2\text{travi}} &= 1.0 \cdot [7 \cdot (0.30 \cdot 0.30 \cdot 5.00) \cdot 2500] = 7875.00 \text{ kg(f)} \\W_{2\text{pilastri}} &= 1.0 \cdot [6 \cdot (0.30 \cdot 0.30 \cdot 1.50) \cdot 2500] = 2025.00 \text{ kg(f)} \\W_{2\text{QPS sol}} &= 1.0 \cdot [5.00 \cdot 10.00 \cdot 350] = 17500.00 \text{ kg(f)} \\W_{2\text{QPN sol}} &= 1.0 \cdot [5.00 \cdot 10.00 \cdot 150] = 7500.00 \text{ kg(f)} \\W_{2\text{QA sol}} &= 0.0 \cdot [5.00 \cdot 10.00 \cdot 100] = 0000.00 \text{ kg(f)} \\W_2 &= 34900.00 \text{ kg(f)} \\MS_2 &= 12350.00/9.81 = 3557.59 \text{ Kg(m)}\end{aligned}$$

I coefficienti di ripartizione delle forze sismiche, per entrambe le direzioni di azione, valgono:

$$c_1 = 3.00 \cdot 69925.00 / (3.00 \cdot 69925.00 + 6.00 \cdot 34900.00) = 0.501$$

$$c_2 = 6.00 \cdot 34900.00 / (3.00 \cdot 69925.00 + 6.00 \cdot 34900.00) = 0.499$$

### Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
MS <sub>1</sub>	7127.93 kg (m)	7127.93 kg (m)
MS <sub>2</sub>	3557.59 kg (m)	3557.59 kg (m)
c <sub>1</sub>	0.501	0.5
c <sub>2</sub>	0.499	0.5

### Calcolo teorico:

Il peso relativo alle masse sismiche vale:

$$W = W_1 + W_2 = 69925.00 + 34900.00 = 104825.00 \text{ kg(f)}$$

Il periodo proprio di vibrazione flessionale dell'edificio si assume pari a:

$$T_1 = C_1 H^{3/4} = 0.075 \cdot (6.00)^{3/4} = 0.287$$

I valori dei parametri degli spettri risultano, dalle tabelle allegate alla norma, pari a:

$$\text{SLD: } a_g/g = 0.0600 ; F_0 = 2.56 ; T_C^* = 0.27$$

$$\text{SLV: } a_g/g = 0.1397 ; F_0 = 2.44 ; T_C^* = 0.30$$

Il periodi corrispondenti all'inizio del tratto a velocità costante degli spettri sono:

$$\text{SLD: } T_C = C_C T_C^* = 1.0 \cdot 0.27 = 0.27$$

$$\text{SLV: } T_C = C_C T_C^* = 1.0 \cdot 0.30 = 0.30$$

Il periodi corrispondenti all'inizio del tratto ad accelerazione costante degli spettri sono:

$$\text{SLD: } T_B = T_C/3 = 0.27/3 = 0.09$$

$$\text{SLV: } T_B = T_C/3 = 0.30/3 = 0.10$$



Il periodi corrispondenti all'inizio del tratto a spostamento costante degli spettri sono:

$$\text{SLD: } T_D = 4 \cdot a_g/g + 1.6 = 4.0 \cdot 0.0600 + 1.6 = 1.84$$

$$\text{SLV: } T_D = 4 \cdot a_g/g + 1.6 = 4.0 \cdot 0.1397 + 1.6 = 2.16$$

Per lo spettro relativo allo SLD risulta  $T_C < T_1 < T_D$ , mentre per lo spettro relativo allo SLV risulta  $T_B < T_1 < T_C$ . Le ordinate degli spettri relative al periodo proprio di vibrazione flessionale dell'edificio risultano pertanto:

$$\text{SLD: } S_d(T_1) = a_g/g \cdot S \cdot \eta \cdot F_0 \cdot (T_C/T_1)$$

$$\text{SLV: } S_d(T_1) = a_g/g \cdot S \cdot (1/q) \cdot F_0$$

In cui il coefficiente della categoria di sottosuolo e delle condizioni topografiche vale:

$$S = S_S \cdot S_T = 1.0 \cdot 1.0 = 1.0$$

In riferimento al §7.3.1 del D.M. 08: *"Quando si utilizza l'analisi lineare per sistemi non dissipativi, come avviene per gli stati limite di esercizio, gli effetti delle azioni sismiche sono calcolati, quale che sia la modellazione per esse utilizzata, riferendosi allo spettro di progetto ottenuto assumendo un fattore di struttura  $q$  unitario"*, lo smorzamento dello spettro allo SLD risulta:

$$\text{SLD: } \eta = 1/1.0 = 1.0$$

Data la diversa tipologia strutturale il fattore di struttura per gli spettri di progetto allo SLV è differente per le due direzioni sismiche, assumendo:  $q_0 = 3.0 \cdot a_u/a_1$ , con  $a_u/a_1 = 1.3$  per direzione X del sisma e  $a_u/a_1 = 1.2$  per direzione Y del sisma;  $K_D = 1.0$ ;  $K_R = 1.0$  risulta:

$$\text{SLV}_X: q = q_0 \cdot K_R \cdot K_W = 3.0 \cdot a_u/a_1 \cdot K_R \cdot K_W = 3.0 \cdot 1.3 \cdot 1.0 \cdot 1.0 = 3.9$$

$$\text{SLV}_Y: q = q_0 \cdot K_R \cdot K_W = 3.0 \cdot a_u/a_1 \cdot K_R \cdot K_W = 3.0 \cdot 1.2 \cdot 1.0 \cdot 1.0 = 3.6$$

In fine risulta:

$$\text{SLD: } S_d(T_1) = 0.0600 \cdot 1.0 \cdot 1.0 \cdot 2.56 \cdot (0.27/0.287) = 0.1445$$

$$\text{SLV}_X: S_d(T_1) = 0.1397 \cdot 1.0 \cdot (1/3.9) \cdot 2.44 = 0.0874$$

$$\text{SLV}_Y: S_d(T_1) = 0.1397 \cdot 1.0 \cdot (1/3.6) \cdot 2.44 = 0.0946$$

Assumendo  $\lambda = 1.0$ , il taglio sismico alla base della struttura risulta:

$$\text{SLD: } F_h = S_d(T_1) \cdot W \cdot \lambda = 0.1445 \cdot 104825.00 \cdot 1.0 = 15147.21 \text{ kg(f)}$$

$$\text{SLV}_X: F_h = S_d(T_1) \cdot W \cdot \lambda = 0.0874 \cdot 104825.00 \cdot 1.0 = 9161.70 \text{ kg(f)}$$

$$\text{SLV}_Y: F_h = S_d(T_1) \cdot W \cdot \lambda = 0.0946 \cdot 104825.00 \cdot 1.0 = 9916.45 \text{ kg(f)}$$

Infine, le forze sismiche agenti sui due impalcati valgono:

SLD:

$$F_1 = c_1 \cdot F_h = 0.501 \cdot 15147.21 = 7588.75 \text{ kg(f)}$$

$$F_2 = c_2 \cdot F_h = 0.499 \cdot 15147.21 = 7558.46 \text{ kg(f)}$$

SLV<sub>X</sub>:

$$F_1 = c_1 \cdot F_h = 0.501 \cdot 9161.70 = 4590.01 \text{ kg(f)}$$

$$F_2 = c_2 \cdot F_h = 0.499 \cdot 9161.70 = 4571.69 \text{ kg(f)}$$

SLV<sub>Y</sub>:

$$F_1 = c_1 \cdot F_h = 0.501 \cdot 9916.44 = 4968.14 \text{ kg(f)}$$

$$F_2 = c_2 \cdot F_h = 0.499 \cdot 9916.44 = 4948.31 \text{ kg(f)}$$

## Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
F <sub>1</sub> SLD	7588.75 kg (f)	7554.45 kg (f)
F <sub>2</sub> SLD	7558.46 kg (f)	7540.94 kg (f)

	Valore teorico	ModeSt
$F_1 \text{ SLV}_x$	4590.01 kg (f)	4584.40 kg (f)
$F_2 \text{ SLV}_x$	4571.69 kg (f)	4576.20 kg (f)

	Valore teorico	ModeSt
$F_1 \text{ SLV}_y$	4968.14 kg (f)	4966.43 kg (f)
$F_2 \text{ SLV}_y$	4948.31 kg (f)	4957.55 kg (f)

### Calcolo teorico:

#### Azioni orizzontali convenzionali per carichi statici:

I carichi applicati ai due impalcati risultano:

$$\begin{aligned}
 W_{1 \text{ travi}} &= 7 \cdot (0.30 \cdot 0.30 \cdot 5.00) \cdot 2500 = 7875.00 \text{ kg(f)} \\
 W_{1 \text{ pilastri}} &= 6 \cdot (0.30 \cdot 0.30 \cdot 3.00) \cdot 2500 = 4050.00 \text{ kg(f)} \\
 W_{1 \text{ QPS sol}} &= 5.00 \cdot 10.00 \cdot 350 = 17500.00 \text{ kg(f)} \\
 W_{1 \text{ QPN sol}} &= 5.00 \cdot 10.00 \cdot 150 = 7500.00 \text{ kg(f)} \\
 W_{1 \text{ tamp}} &= 6 \cdot 5.00 \cdot 1000 = 30000.00 \text{ kg(f)} \\
 W_{1 \text{ QA sol}} &= 5.00 \cdot 10.00 \cdot 200 = 10000.00 \text{ kg(f)} \\
 W_1 &= 76925.00 \text{ kg(f)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{2 \text{ travi}} &= 7 \cdot (0.30 \cdot 0.30 \cdot 5.00) \cdot 2500 = 7875.00 \text{ kg(f)} \\
 W_{2 \text{ pilastri}} &= 6 \cdot (0.30 \cdot 0.30 \cdot 1.50) \cdot 2500 = 2025.00 \text{ kg(f)} \\
 W_{2 \text{ QPS sol}} &= 5.00 \cdot 10.00 \cdot 350 = 17500.00 \text{ kg(f)} \\
 W_{2 \text{ QPN sol}} &= 5.00 \cdot 10.00 \cdot 150 = 7500.00 \text{ kg(f)} \\
 W_{2 \text{ QA sol}} &= 5.00 \cdot 10.00 \cdot 100 = 5000.00 \text{ kg(f)} \\
 W_2 &= 39900.00 \text{ kg(f)}
 \end{aligned}$$

Le forze orizzontali convenzionali per stati limite non sismici, per entrambe le direzioni di azione, valgono:

$$F_1 = 0.01 \cdot 76925.00 = 769.25 \text{ kg(f)}$$

$$F_2 = 0.01 \cdot 39900.00 = 399.00 \text{ kg(f)}$$

### Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$F_1$	769.25 kg (f)	769.25 kg (f)
$F_2$	399.00 kg (f)	399.00 kg (f)

# Verifica di una trave in c.a.

**Caratteristiche della trave:** in relazione alla struttura TVDM08CA verrà verificata la trave n.104. La trave è ad una campata, con luce di calcolo  $L_c = 5$  m e luce a filo pilastri  $L = 4.4$  m; la sezione ha base  $B = 30$  cm, altezza  $H = 30$  cm e copriferro di calcolo dal baricentro delle armature  $c = 4$  cm (copriferro reale al bordo staffa pari a 2.3 cm); l'armatura inferiore è composta da 3Ø18, mentre la superiore è composta da 2Ø18 con 1Ø18 e un 1Ø14 aggiuntive su gli appoggi; sono posizionate staffe a due braccia Ø8/6 nelle zone critiche e Ø8/9 nella zona centrale.

**Sollecitazioni:** Per gli stati limite ultimi i massimi momenti e tagli valgono:

$M_{Ed,U,a} = -7305.95$  kgm agli appoggi e  $M_{Ed,U,c} = +6080.39$  gm in campata;  
 $T_{Ed,U,a} = 11544.60$  kg agli appoggi e  $T_{Ed,U,c} = 1223.15$  kg in campata.

Per gli stati limite di esercizio i massimi momenti valgono:

$M_{Ed,R,a} = -5324.41$  kgm agli appoggi e  $M_{Ed,R,c} = +3958.22$  kgm in campata per gli SLE R;  
 $M_{Ed,F,a} = -4657.84$  kgm agli appoggi e  $M_{Ed,F,c} = +3414.92$  kgm in campata per gli SLE F;  
 $M_{Ed,Q,a} = -4401.86$  kgm agli appoggi e  $M_{Ed,Q,c} = +3186.96$  kgm in campata per gli SLE Q.

**Caratteristiche dei materiali:**

Calcestruzzo C25/30 ( $f_{ck} = 24.9$  N/mm<sup>2</sup>,  $\epsilon_{cu} = 3.5\text{‰}$ ), la cui resistenza di calcolo a compressione vale:

$$f_{cd} = \alpha_{cc} \cdot f_{ck} / \gamma_c = 0.85 \cdot 24.9 / 1.5 = 14.11 \text{ N/mm}^2 = 141.1 \text{ kg/cm}^2$$

Acciaio B450C ( $f_{yk} = 450$  N/mm<sup>2</sup>,  $\epsilon_{yd} = 1.82\text{‰}$ ) la cui resistenza di calcolo vale:

$$f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s = 450 / 1.15 = 391.30 \text{ N/mm}^2 = 3913.0 \text{ kg/cm}^2$$

**File:** [TestValidazione] – TVDM08CA – TR104.gdb

**Calcolo teorico:**

Stato Limite Ultimo - Ferri longitudinali - Verifiche armatura esistente

Per il calcolo del momento resistente viene considerata la distribuzione delle tensioni sul calcestruzzo con il modello stress-block. Data la rottura lato cls, ipotizzando la posizione dell'asse neutro inizialmente pari a  $x$ , risultano le seguenti deformazioni e tensioni sull'acciaio:

$$\begin{aligned}\epsilon_y' &= \epsilon_{cu} \cdot (x - c) / x \\ f_{sy}' &= f_{yd} \cdot \min\{\epsilon_y' / \epsilon_{yd}; 1\} \\ \epsilon_y &= \epsilon_{cu} \cdot (H - x - c) / x \\ f_y &= f_{yd} \cdot \min\{\epsilon_y / \epsilon_{yd}; 1\}\end{aligned}$$

L'equilibrio fra compressioni e trazioni sulla sezione restituisce il relativo valore dell'asse neutro:

$$x = (f_y \cdot A_f - f_y' \cdot A_f') / (0.85 \cdot 0.8 \cdot f_{cd} \cdot B)$$

Se tale valore è pari a quello dell'ipotesi iniziale allora la posizione dell'asse neutro è definita, altrimenti il processo viene reiterato. Il rapporto fra la posizione dell'asse neutro e l'altezza utile vale quindi:

$$x/d = x / (H - c)$$

In fine il momento ultimo vale:

$$M_{Rd,U} = (0.8 \cdot 0.85 \cdot f_{cd} \cdot B \cdot x) \cdot (H/2 - 0.4 \cdot x) + (f_s \cdot A_f + f_s' \cdot A_f') \cdot (H/2 - c)$$

Stato Limite Ultimo - Ferri longitudinali - Verifiche armatura esistente a Taglio

Le barre posizionate inferiormente devono essere in grado almeno di sostenere, in ogni sezione, uno sforzo di trazione pari al taglio agente  $T_U$ , la quantità di area di barre  $A_{FTP}$  da sottrarre a quella effettivamente esistente è quindi pari a:

$$A_{FTP} = T_U / f_{yd}$$

Le verifiche vengono effettuate, per ogni sezione della trave, controllando la resistenza a taglio delle barre posizionate inferiormente e quindi, calcolando il momento ultimo con l'area effettiva di barre che lavora per flessione.

Per le sezioni agli appoggi risulta:

$$A_{FTP,a} = T_{U,a} / f_{yd} = 11544.60 / 3913.0 = 2.95 \text{ cm}^2$$

Le aree di ferro di calcolo valgono:

$$A_f = 9.17 \text{ cm}^2 \quad (2\emptyset 18 \text{ } 1\emptyset 18 \text{ } 1\emptyset 14)$$

$$A_f' = 4.68 \text{ cm}^2 \quad (3\emptyset 18 - A_{FTP,a})$$

L'equilibrio fra compressioni e trazioni sulla sezione risulta soddisfatto per  $x = 7.11 \text{ cm}$ , da cui risulta:

$$x/d = x/(H-c) = 7.11/(30-4) = 0.27$$

$$\varepsilon_y' = \varepsilon_{cu} \cdot (x-c)/x = 3.5 \cdot (7.11-4)/7.11 = 1.53$$

$$f_y' = f_{yd} \cdot \min\{\varepsilon_y' / \varepsilon_{yd} ; 1\} = 3913.0 \cdot \min\{1.53/1.82 ; 1\} = 3291.5 \text{ kg/cm}^2$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{cu} \cdot (H-x-c)/x = 3.5 \cdot (30-7.11-4)/7.11 = 9.30$$

$$f_y = f_{yd} \cdot \min\{\varepsilon_y / \varepsilon_{yd} ; 1\} = 3913.0 \cdot \min\{9.30/1.82 ; 1\} = 3913.0 \text{ kg/cm}^2$$

$$M_{Rd,U,a} = (0.8 \cdot 0.85 \cdot f_{cd} \cdot B \cdot x) \cdot (H/2 - 0.4 \cdot x) + (f_s \cdot A_f + f_s' \cdot A_f') \cdot (H/2 - c)$$

$$M_{Rd,U,a} = (0.8 \cdot 0.85 \cdot 141.1 \cdot 30 \cdot 7.11) \cdot (30/2 - 0.4 \cdot 7.11) + (3913.0 \cdot 9.17 + 3291.5 \cdot 4.68) \cdot (30/2 - 4) = 813040 \text{ kgcm}$$

$$M_{Rd,U,a} = 8130.40 \text{ kgm}$$

$$s_{ic} = M_{Rd,U,a} / M_{Ed,U,a} = 8130.40 / 7305.95 = 1.113$$

## Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$A_{FTP}$	2.95 cm <sup>2</sup>	2.95 cm <sup>2</sup>
$x/d$	0.27	0.25
$\varepsilon_y$	9.30 ‰	10.30 ‰
$M_u$	- 8130.40 kgm	- 8179.80 kgm
$s_{ic}$	1.113	1.120

Nota: Le differenze nella valutazione del momento ultimo sono dovute all'utilizzo del modello parabola - rettangolo da parte di ModeSt, invece del modello stress-block.

Per la sezione in campata risulta:

$$A_{FTP,c} = T_{U,c} / f_{yd} = 1223.15 / 3913.0 = 0.31 \text{ cm}^2$$

Le aree di ferro di calcolo valgono:

$$A_f = 7.32 \text{ cm}^2 \quad (3\emptyset 18 - A_{FTP,c})$$

$$A_f' = 5.09 \text{ cm}^2 \quad (2\emptyset 18)$$

L'equilibrio fra compressioni e trazioni sulla sezione risulta soddisfatto per  $x = 5.81 \text{ cm}$ , da cui risulta:

$$x/d = x/(H-c) = 5.81/(30-4) = 0.22$$

$$\varepsilon_y' = \varepsilon_{cu} \cdot (x-c)/x = 3.5 \cdot (5.81-4)/5.81 = 1.10$$

$$f_y' = f_{yd} \cdot \min\{\varepsilon_y' / \varepsilon_{yd} ; 1\} = 3913.0 \cdot \min\{1.10/1.82 ; 1\} = 2342.5 \text{ kg/cm}^2$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \varepsilon_{cu} \cdot (H-x-c)/x = 3.5 \cdot (30-5.81-4)/5.81 = 12.17 \\ f_y &= f_{yd} \cdot \min\{\varepsilon_y/\varepsilon_{yd}; 1\} = 3913.0 \cdot \min\{12.17/1.82; 1\} = 3913.0 \text{ kg/cm}^2 \\ M_{Rd,U,c} &= (0.8 \cdot 0.85 \cdot f_{cd} \cdot B \cdot x) \cdot (H/2 - 0.4 \cdot x) + (f_s \cdot A_f + f'_s \cdot A'_f) \cdot (H/2 - c) \\ M_{Rd,U,c} &= (0.8 \cdot 0.85 \cdot 141.1 \cdot 30 \cdot 5.81) \cdot (30/2 - 0.4 \cdot 5.81) + \\ &\quad + (3913.0 \cdot 7.32 + 2342.5 \cdot 5.09) \cdot (30/2 - 4) = 658161 \text{ kgcm} \\ M_{Rd,U,c} &= 6581.61 \text{ kgm} \\ \text{sic.} &= M_{Rd,U,c}/M_{Ed,U,c} = 6581.61/6080.39 = 1.082\end{aligned}$$

## Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$A_{fTP}$	0.31 cm <sup>2</sup>	0.31 cm <sup>2</sup>
$x/d$	0.22	0.21
$\varepsilon_y$	12.17 ‰	13.12 ‰
$M_u$	+ 6581.61 kgm	+ 6626.31 kgm
Sic.	1.082	1.090

Nota: Le differenze nella valutazione del momento ultimo sono dovute all'utilizzo del modello parabola - rettangolo da parte di ModeSt, invece del modello stress-block.

In fine, per il progetto in gerarchia di resistenze, è necessario calcolare il momento ultimo positivo in prossimità dell'appoggio:

$$\begin{aligned}A_{fTP,a} &= T_{U,a}/f_{yd} = 11544.60/3913.0 = 2.95 \text{ cm}^2 \\ A_f &= 4.68 \text{ cm}^2 \quad (3\emptyset 18 - A_{fTP,a}) \\ A'_f &= 9.17 \text{ cm}^2 \quad (2\emptyset 18 \text{ } 1\emptyset 18 \text{ } 1\emptyset 14) \\ x &= 4.36 \text{ cm} \\ x/d &= x/(H-c) = 4.36/(30-4) = 0.17 \\ \varepsilon'_y &= \varepsilon_{cu} \cdot (x-c)/x = 3.5 \cdot (4.36-4)/4.36 = 0.29 \\ f'_y &= f_{yd} \cdot \min\{\varepsilon'_y/\varepsilon_{yd}; 1\} = 3913.0 \cdot \min\{0.29/1.82; 1\} = 629.2 \text{ kg/cm}^2 \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_{cu} \cdot (H-x-c)/x = 3.5 \cdot (30-4.36-4)/4.36 = 17.35 \\ f_y &= f_{yd} \cdot \min\{\varepsilon_y/\varepsilon_{yd}; 1\} = 3913.0 \cdot \min\{17.35/1.82; 1\} = 3913.0 \text{ kg/cm}^2 \\ M_{Rd,U,a} &= (0.8 \cdot 0.85 \cdot f_{cd} \cdot B \cdot x) \cdot (H/2 - 0.4 \cdot x) + (f_s \cdot A_f + f'_s \cdot A'_f) \cdot (H/2 - c) \\ M_{Rd,U,a} &= (0.8 \cdot 0.85 \cdot 141.1 \cdot 30 \cdot 4.36) \cdot (30/2 - 0.4 \cdot 4.36) + \\ &\quad + (629.2 \cdot 9.17 + 3913.0 \cdot 4.68) \cdot (30/2 - 4) = 431176 \text{ kgcm} \\ M_{Rd,U,a} &= 4311.76 \text{ kgm}\end{aligned}$$

## Calcolo teorico:

### Stato Limite Ultimo - Staffe - Verifiche armatura esistente

Le sollecitazioni di taglio di calcolo  $V_{Ed}$  si ottengono sommando il contributo dovuto ai carichi gravitazionali agenti sulla trave  $q_{tot}$ , considerata incernierata agli estremi, alle sollecitazioni di taglio corrispondenti alla formazione delle cerniere plastiche nella trave e prodotte dai momenti resistenti  $M_{b,Rd,1,2}$  delle due sezioni di estremità amplificati del fattore di sovraresistenza  $\gamma_{Rd}$  assunto pari ad 1.00 per strutture in CD B:

$$V_{Ed} = \max\{q_{tot} \cdot L/2 + \gamma_{Rd} \cdot (M_{b,Rd,1} + M_{b,Rd,2})/L; T_{Ed,U,a}\}$$

La resistenza a taglio  $V_{Rd}$  di elementi strutturali dotati di specifica armatura a taglio viene valutata sulla base della schematizzazione a traliccio con inclinazione  $\theta$  dei puntoni di calcestruzzo tale che  $\text{ctg}(\theta)=1$ , risulta pertanto:

$$\begin{aligned}V_{Rd} &= \min\{V_{Rsd}; V_{Rcd}\} \\ V_{Rsd} &= 0.9 \cdot (H-c + \emptyset_s + \emptyset_b/2) \cdot (A_{sw}/s) \cdot f_{yd} \\ V_{Rcd} &= 0.9 \cdot (H-c) \cdot b_w \cdot \alpha_c \cdot f_{cd}'/2\end{aligned}$$

In cui:  $A_{sw}/s$  è il rapporto fra l'area ed il passo delle staffe;  $\phi_s$  e  $\phi_b$  sono rispettivamente i diametri delle staffe e delle barre;  $b_w=B$ ;  $\alpha_c=1$ ;  $f_{cd}'=0.5 \cdot f_{cd}$ .

I carichi agenti sulla trave valgono:

$q_{QPS} =$	$0.30 \cdot 0.30 \cdot 2500 =$	225.00	kg(f)/m
$q_{QPS\ sol} =$	$5.00 \cdot 350 =$	1750.00	kg(f)/m
$q_{QPN\ sol} =$	$5.00 \cdot 150 =$	750.00	kg(f)/m
$q_{QA\ sol} =$	$5.00 \cdot 200 =$	<u>1000.00</u>	<u>kg(f)/m</u>
$q_{tot} =$		3725.00	kg(f)/m

Quindi, al limite della zona rigida col pilastro, le sollecitazioni di taglio di calcolo valgono:

$$V_{Ed} = \max\{q_{tot} \cdot L/2 + \gamma_{Rd} \cdot (M_{b,Rd,1} + M_{b,Rd,2})/L ; T_{Ed,U,a}\}$$

$$V_{Ed} = \max\{3725.00 \cdot 4.60/2 + 1.00 \cdot (8130.40 + 4311.76)/4.60 ; 11544.60\}$$

$$V_{Ed} = \max\{11272.32 ; 11544.60\} = 11544.60 \text{ kg}$$

Nella zona critica sono posizionate staffe  $\phi 8/6$  a due braccia, pertanto risulta:

$$A_{sw}/s = 2 \cdot 0.50/6 = 0.16$$

$$V_{Rsd} = 0.9 \cdot (H-c + (\phi_s + \phi_b)/2) \cdot (A_{sw}/s) \cdot f_{yd} = 0.9 \cdot (27.3) \cdot 0.16 \cdot 3913.0 = 15382.79 \text{ kg}$$

$$V_{Rcd} = 0.9 \cdot (H-c) \cdot b_w \cdot \alpha_c \cdot f_{cd}'/2 = 0.9 \cdot (30-4) \cdot 30 \cdot 1 \cdot 0.5 \cdot 141.1/2 = 24763.05 \text{ kg}$$

$$V_{Rd} = \min\{V_{Rsd} ; V_{Rcd}\} = 15608.17 \text{ kg} > 11544.60 \text{ kg} = V_{Ed}$$

### Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$V_{Ed}$	11544.60 kg	11544.60 kg
$V_{Rsd}$	15382.79 kg	15341.90 kg
$V_{Rcd}$	24763.05 kg	24763.10 kg

In fine, al limite della zona critica, le sollecitazioni di taglio di calcolo vengono valutate partendo dal valore  $V_{Ed,a}$  precedentemente valutato al limite della zona rigida col pilastro:

$$V_{Ed} = V_{Ed,a} \cdot [1 - H/(L/2)] = 11544.60 \cdot [1 - 30/(460/2)] = 10038.78 \text{ kg}$$

Al di fuori della zona critica sono posizionate staffe  $\phi 8/9$  a due braccia, pertanto risulta:

$$A_{sw}/s = 2 \cdot 0.50/9 = 0.11$$

$$V_{Rsd} = 0.9 \cdot (H-c + (\phi_s + \phi_b)/2) \cdot (A_{sw}/s) \cdot f_{yd} = 0.9 \cdot (27.3) \cdot 0.11 \cdot 3913.0 = 10575.67 \text{ kg}$$

$$V_{Rcd} = 0.9 \cdot (H-c) \cdot b_w \cdot \alpha_c \cdot f_{cd}'/2 = 0.9 \cdot (30-4) \cdot 30 \cdot 1 \cdot 0.5 \cdot 141.1/2 = 24763.05 \text{ kg}$$

$$V_{Rd} = \min\{V_{Rsd} ; V_{Rcd}\} = 10730.62 \text{ kg} > 10239.56 \text{ kg} = V_{Ed}$$

### Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$V_{Ed}$	10038.78 kg	10194.50 kg
$V_{Rsd}$	10575.67 kg	10227.90 kg
$V_{Rcd}$	24763.05 kg	24763.10 kg

Nota: Le differenze nella valutazione del taglio ultimo sono dovute alla distribuzione in condizioni sismiche diversa rispetto al calcolo teorico approssimato, mentre le differenze nella valutazione del taglio - trazione sono dovute alla precisione numerica nel calcolo dell'area delle staffe posizionate.

### Calcolo teorico:

#### Stato Limite Esercizio - Ferri longitudinali - Verifiche armatura esistente

Per il calcolo delle tensioni di esercizio, dato il Coeff. di omogeneizzazione  $n$  ( $n = 15$ ), la posizione dell'asse neutro vale:

$$x = f \cdot (-1 + \sqrt{1 + 2 \cdot d \cdot f})$$

in cui:

$$f = n \cdot (A_f + A_f') / B$$

$$d = [A_f \cdot (H - c) + A_f' \cdot c] / (A_f + A_f')$$

Da cui il momento d'inerzia della sezione ideale vale:

$$J = B \cdot x^3 / 3 + n \cdot [A_f \cdot (H - c - x)^2 + A_f' \cdot (x - c)^2]$$

E quindi, dato il Momento agente "M", le tensioni sui materiali valgono:

$$\sigma_c = (M/J) \cdot x$$

$$\sigma_s = (M/J) \cdot n \cdot (H - c - x)$$

$$\sigma_s' = (M/J) \cdot n \cdot (x - c)$$

Per le sezioni agli appoggi risulta:

$$A_f = 9.17 \text{ cm}^2 \quad (2\phi 18 \text{ } 1\phi 18 \text{ } 1\phi 14)$$

$$A_f' = 4.68 \text{ cm}^2 \quad (3\phi 18 - A_{fTP,a})$$

$$f = n \cdot (A_f + A_f') / B = 15 \cdot (9.17 + 4.68) / 30 = 6.93 \text{ cm}$$

$$d = [A_f \cdot (H - c) + A_f' \cdot c] / (A_f + A_f') = [9.17 \cdot (30 - 4) + 4.68 \cdot 4] / (9.17 + 4.68) = 18.67 \text{ cm}$$

$$x = f \cdot (-1 + \sqrt{1 + 2 \cdot d \cdot f}) = 6.93 \cdot (-1 + \sqrt{1 + 2 \cdot 18.67 / 6.93}) = 10.54 \text{ cm}$$

$$J = B \cdot x^3 / 3 + n \cdot [A_f \cdot (H - c - x)^2 + A_f' \cdot (x - c)^2]$$

$$J = 30 \cdot 10.54^3 / 3 + 15 \cdot [9.17 \cdot (30 - 4 - 10.54)^2 + 4.68 \cdot (10.54 - 4)^2] = 47588 \text{ cm}^4$$

Quindi, per gli SLE R, essendo  $M = M_{Ed,R,a} = -5324.41 \text{ kgm}$ , risulta:

$$\sigma_c = (M/J) \cdot x = (532441 / 47588) \cdot 10.54 = 117.95 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_s = (M/J) \cdot n \cdot (H - c - x) = (532441 / 47588) \cdot 15 \cdot (30 - 4 - 10.54) = 2594.31 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_s' = (M/J) \cdot n \cdot (x - c) = (532441 / 47588) \cdot 15 \cdot (10.54 - 4) = 1097.94 \text{ kg/cm}^2$$

### Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$\sigma_c$	117.95 kg/cm <sup>2</sup>	117.92 kg/cm <sup>2</sup>
$\sigma_s$	+ 2594.31 kg/cm <sup>2</sup>	+ 2593.37 kg/cm <sup>2</sup>
$\sigma_s'$	- 1097.94 kg/cm <sup>2</sup>	- 1097.73 kg/cm <sup>2</sup>

Mentre, per gli SLE Q, essendo  $M = M_{Ed,Q,a} = -4401.86 \text{ kgm}$ , risulta:

$$\sigma_c = (M/J) \cdot x = (440186 / 47588) \cdot 10.54 = 97.51 \text{ kg/cm}^2$$

### Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$\sigma_c$	97.51 kg/cm <sup>2</sup>	97.49 kg/cm <sup>2</sup>

Per la sezione in mezzzeria risulta:

$$A_f = 7.32 \text{ cm}^2 \quad (3\phi 18 - A_{fTP,c})$$

$$A_f' = 5.09 \text{ cm}^2 \quad (2\phi 18)$$

$$f = n \cdot (A_f + A_f') / B = 15 \cdot (7.32 + 5.09) / 30 = 6.21 \text{ cm}$$

$$d = [A_f \cdot (H - c) + A_f' \cdot c] / (A_f + A_f') = [7.32 \cdot (30 - 4) + 5.09 \cdot 4] / (7.32 + 5.09) = 16.98 \text{ cm}$$

$$x = f \cdot (-1 + \sqrt{1 + 2 \cdot d \cdot f}) = 6.21 \cdot (-1 + \sqrt{1 + 2 \cdot 16.98 / 6.21}) = 9.58 \text{ cm}$$

$$J = B \cdot x^3 / 3 + n \cdot [A_f \cdot (H - c - x)^2 + A_f' \cdot (x - c)^2]$$

$$J = 30 \cdot 9.58^3 / 3 + 15 \cdot [7.32 \cdot (30 - 4 - 9.58)^2 + 5.09 \cdot (9.58 - 4)^2] = 40773 \text{ cm}^4$$



In campata viene considerato un incremento del momento pari al 10%. Quindi, per gli SLE R si ottiene  $M = 1.1 \cdot M_{Ed,R,c} = 1.1 \cdot 3958.22 = 4354.04 \text{ kgm}$ , da cui risulta:

$$\sigma_c = (M/J) \cdot x = (435404/40773) \cdot 9.58 = 102.31 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_s = (M/J) \cdot n \cdot (H-c-x) = (435404/40773) \cdot 15 \cdot (30-4-9.58) = 2630.07 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_s' = (M/J) \cdot n \cdot (x-c) = (435404/40773) \cdot 15 \cdot (9.58-4) = 893.88 \text{ kg/cm}^2$$

#### Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$\sigma_c$	102.31 kg/cm <sup>2</sup>	102.30 kg/cm <sup>2</sup>
$\sigma_s$	+ 2630.07 kg/cm <sup>2</sup>	+ 2629.56 kg/cm <sup>2</sup>
$\sigma_s'$	- 893.88 kg/cm <sup>2</sup>	- 893.90 kg/cm <sup>2</sup>

Mentre per gli SLE Q si ottiene  $M = M_{Ed,Q,c} = 1.1 \cdot 3186.96 = 3505.65 \text{ kgm}$ , da cui risulta:

$$\sigma_c = (M/J) \cdot x = (350565/40773) \cdot 9.58 = 82.37 \text{ kg/cm}^2$$

#### Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$\sigma_c$	82.37 kg/cm <sup>2</sup>	82.37 kg/cm <sup>2</sup>

#### Calcolo teorico:

##### Verifiche stato limite di formazione delle fessure

Il valore dell'apertura delle fessure è pari a:

$$w_k = 1.7 \cdot s_{rm} \cdot \epsilon_{sm}$$

Il valore della distanza media tra le fessure  $s_{rm}$  e la deformazione unitaria media dell'armatura  $\epsilon_{sm}$  vengono valutate utilizzando la procedura del D.M. 9 gennaio 1996:

$$s_{rm} = 2 \cdot (cr + s/10) + k_2 \cdot k_3 \cdot \phi / \rho_r$$

$$\epsilon_{sm} = (\sigma_s / E_s) \cdot \max\{0.4 ; 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot (\sigma_{sr} / \sigma_s)^2\}$$

In cui:  $cr = 2.3 + 0.8 = 3.1 \text{ cm}$  è il ricoprimento d'armatura;  $s$  e  $\phi$  sono l'interasse fra le barre e il loro diametro;  $\rho_r$  è il rapporto fra l'area di ferro tesa  $A_f$  e la relativa area di calcestruzzo efficace  $A_{c,eff} = B_{eff} \cdot d_{eff}$ ;  $k_2 = 0.4$ ;  $k_3 = 0.125$ ;  $E_s = 2060000 \text{ kg/cm}^2$  è l'elasticità dell'acciaio;  $\beta_1 = 1.0$ ;  $\beta_2 = 0.5$ ;  $\sigma_s$  e  $\sigma_{sr}$  sono le tensioni nell'acciaio in condizioni di esercizio e di prima fessurazione.

Per le sezioni agli appoggi risulta:

$$\phi = 18 \text{ mm}$$

$$s = (30 - 2 \cdot (2.3 + 0.8 + 1.8/2)) / 3 = 7.33 \text{ cm} = 73.33 \text{ mm}$$

$$A_f = 9.17 \text{ cm}^2 \quad (2\phi 18 \ 1\phi 18 \ 1\phi 14)$$

$$A_{c,eff} = B_{eff} \cdot d_{eff} = 30 \cdot 16.6 = 498 \text{ cm}^2$$

$$\rho_r = A_f / A_e = 9.17 / 498 = 1.84\%$$

$$s_{rm} = 2 \cdot (cr + s/10) + k_2 \cdot k_3 \cdot \phi / \rho_r =$$

$$= 2 \cdot (31 + 73.33/10) + 0.4 \cdot 0.125 \cdot 18 / (1.84/100) = 125.53 \text{ mm}$$

$$\sigma_{sr} = 959.18 \text{ kg/cm}^2$$

Quindi, per gli SLE Q, essendo  $M = M_{Ed,Q,a} = -4401.86 \text{ kgm}$ , risulta:

$$\sigma_s = 2137.28 \text{ kg/cm}^2$$

$$\epsilon_{sm} = (\sigma_s / E_s) \cdot \max\{0.4 ; 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot (\sigma_{sr} / \sigma_s)^2\} =$$

$$= (2137.28 / 2060000) \cdot \max\{0.4 ; 1 - 1 \cdot 0.5 \cdot (959.18 / 2137.28)^2\} = 0.93\text{‰}$$

$$w_k = 1.7 \cdot s_{rm} \cdot \epsilon_{sm} = 1.7 \cdot 125.53 \cdot 0.93 / 1000 = 0.199 \text{ mm}$$



**Risultati:**

	Valore teorico	ModeSt
$s_{rm}$	125.53 mm	123.79
$\varepsilon_{sm}$	0.93‰	0.93‰
$w_k$	0.199 mm	0.20 mm

Mentre, per gli SLE F, essendo  $M = M_{Ed,F,a} = -4657.84$  kgm, risulta:

$$\sigma_s = 2261.57 \text{ kg/cm}^2$$

$$\varepsilon_{sm} = (\sigma_s/E_s) \cdot \max\{0.4 ; 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot (\sigma_{sr}/\sigma_s)\} = (2261.57/2060000) \cdot \max\{0.4 ; 1 - 1 \cdot 0.5 \cdot (959.18/2261.57)\} = 1.00\text{‰}$$

$$w_k = 1.7 \cdot s_{rm} \cdot \varepsilon_{sm} = 1.7 \cdot 125.53 \cdot 1.00/1000 = 0.213 \text{ mm}$$

**Risultati:**

	Valore teorico	ModeSt
$s_{rm}$	125.53 mm	123.79 mm
$\varepsilon_{sm}$	1.00‰	1.00‰
$w_k$	0.213 mm	0.21 mm

Per la sezione in mezzzeria risulta:

$$\varnothing = 18 \text{ mm}$$

$$s = (30 - 2 \cdot (2.3 + 0.8 + 1.8/2))/2 = 11.00 \text{ cm} = 110.00 \text{ mm}$$

$$A_f = 7.63 \text{ cm}^2 \quad (3\varnothing 18)$$

$$A_e = A_{c,eff} = B_{eff} \cdot d_{eff} = 30 \cdot 16.6 = 498 \text{ cm}^2$$

$$\rho_r = A_f/A_e = 7.63/498 = 1.53\%$$

$$s_{rm} = 2 \cdot (c_r + s/10) + k_2 \cdot k_3 \cdot \varnothing \cdot \rho_r = 2 \cdot (31 + 110.00/10) + 0.4 \cdot 0.125 \cdot 18 / (1.53/100) = 142.71 \text{ mm}$$

$$\sigma_{sr} = 104.70 \text{ kg/cm}^2$$

In campata viene considerato un incremento del momento pari al 10%. Quindi, per gli SLE Q si ottiene  $M = 1.1 \cdot M_{Ed,Q,c} = 1.1 \cdot 3186.96 = 3505.65$  kgm, da cui risulta:

$$\sigma_s = 2034.10 \text{ kg/cm}^2$$

$$\varepsilon_{sm} = (\sigma_s/E_s) \cdot \max\{0.4 ; 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot (\sigma_{sr}/\sigma_s)\} = (2034.10/2060000) \cdot \max\{0.4 ; 1 - 1 \cdot 0.5 \cdot (104.70/2034.10)\} = 0.86\text{‰}$$

$$w_k = 1.7 \cdot s_{rm} \cdot \varepsilon_{sm} = 1.7 \cdot 142.71 \cdot 0.86/1000 = 0.208 \text{ mm}$$

**Risultati:**

	Valore teorico	ModeSt
$s_{rm}$	142.71 mm	141.02 mm
$\varepsilon_{sm}$	0.86‰	0.89‰
$w_k$	0.208 mm	0.21 mm

Mentre per gli SLE F si ottiene  $M = M_{Ed,F,c} = 1.1 \cdot 3414.92 = 3756.41$  kgm, da cui risulta:

$$\sigma_s = 2179.60 \text{ kg/cm}^2$$

$$\varepsilon_{sm} = (\sigma_s/E_s) \cdot \max\{0.4 ; 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot (\sigma_{sr}/\sigma_s)\} = (2179.60/2060000) \cdot \max\{0.4 ; 1 - 1 \cdot 0.5 \cdot (104.70/2179.60)\} = 0.94\text{‰}$$

$$w_k = 1.7 \cdot s_{rm} \cdot \varepsilon_{sm} = 1.7 \cdot 142.71 \cdot 0.94/1000 = 0.227 \text{ mm}$$

**Risultati:**

	Valore teorico	ModeSt
$S_{rm}$	142.71 mm	141.02 mm
$\varepsilon_{sm}$	0.94‰	0.97‰
$w_k$	0.227 mm	0.23 mm

# Calcolo dei momenti di progetto in gerarchia di resistenze per i pilastri di una struttura a telai in c.a.

**Caratteristiche del telaio:** in relazione alla struttura TVDM08CA verranno calcolati i momenti di progetto in gerarchia di resistenze dei pilastri n.1 (nel nodo n.101 rispetto alle travi n.101 e n.103) e n.2 (nel nodo n.102 rispetto alle due campate della trave n.101 e alla trave n.104).

**Sollecitazioni:** I momenti resistenti delle travi interessate, in valore assoluto, valgono:

$$\begin{aligned}M_{Rd,101,1-2(-)} &= 4302.77 \text{ kgm}; M_{Rd,101,1-2(+)} = 3856.11 \text{ kgm}; \\M_{Rd,101,2-1(-)} &= 5169.47 \text{ kgm}; M_{Rd,101,2-1(+)} = 3716.82 \text{ kgm}; \\M_{Rd,101,2-3(-)} &= 5169.47 \text{ kgm}; M_{Rd,101,2-3(+)} = 3716.82 \text{ kgm}; \\M_{Rd,103,1-4(-)} &= 6486.38 \text{ kgm}; M_{Rd,103,1-4(+)} = 3951.61 \text{ kgm}; \\M_{Rd,104,2-5(-)} &= 8179.80 \text{ kgm}; M_{Rd,104,2-5(+)} = 4353.71 \text{ kgm}.\end{aligned}$$

La notazione  $M_{Rd,t,a-b(-/+)}$  indica il momento resistente della trave 't', al filo del pilastro 'a', nella campata fra i pilastri 'a' e 'b', per sollecitazioni con segno -/+ con flessione positiva per trazioni sull'intradosso.

Per il pilastro n.1 la condizione di carico più gravosa è la CC17, per la quale risultano i seguenti momenti:

$$\begin{aligned}M_{Ed,1,i,y} &= +118.51 \text{ kgm}; M_{Ed,1,s,y} = +492.34 \text{ kgm}; \\M_{Ed,1,i,z} &= +1562.25 \text{ kgm}; M_{Ed,1,s,z} = -2533.20 \text{ kgm}.\end{aligned}$$

Mentre per il pilastro n.2 la condizione di carico più gravosa è la CC9, per la quale risultano i seguenti momenti:

$$\begin{aligned}M_{Ed,2,i,y} &= +661.34 \text{ kgm}; M_{Ed,2,s,y} = -470.37 \text{ kgm}; \\M_{Ed,2,i,z} &= +603.11 \text{ kgm}; M_{Ed,2,s,z} = -2909.99 \text{ kgm};\end{aligned}$$

La notazione  $M_{Ed,p,i/s,y/z}$  indica il momento agente sul pilastro 'p', i/s = inferiore/superiore al nodo di telaio, rispetto agli assi y/z locali del pilastro.

**File:** [TestValidazione] – TVDM08CA – PL0001.gdb ; PL0002.gdb

## Calcolo teorico:

I momenti di verifica dei pilastri vengono calcolati, in accordo con la circolare esplicativa (C7.2.1) § C7.2.1, partendo dai momenti resistenti delle travi e dai momenti sui pilastri risultanti dall'analisi della struttura.

### Pilastro n.1

Rispetto all'asse locale y del pilastro i momenti agenti ( $M_{Ed,1,i,y}$  ed  $M_{Ed,1,s,y}$ ) per la CC17 risultano discordi, con  $M_{Ed,1,s,y}$  momento maggiore in valore assoluto. La trave di riferimento è la n.101 e il momento resistente con segno equilibrante  $M_{Ed,1,s,y}$  risulta essere  $M_{Rd,101,1-2(-)}$ . Risultano i seguenti coefficienti amplificativi e relativi momenti di progetto:

$$\begin{aligned}\alpha_y &= \gamma_{RD} \cdot (M_{Rd,101,1-2(-)} + |M_{Ed,1,i,y}|) / |M_{Ed,1,s,y}| \\ \alpha_y &= 1.1 \cdot (4302.77 + |118.51|) / |492.34| = 9.88 \\ M_{Ed,1,i,y,ver} &= \alpha_y \cdot M_{Ed,1,i,y} = 9.88 \cdot (+118.51) = +1170.88 \text{ kgm} \\ M_{Ed,1,s,y,ver} &= \alpha_y \cdot M_{Ed,1,s,y} = 9.88 \cdot (+492.34) = +4864.32 \text{ kgm}\end{aligned}$$

Rispetto all'asse locale z del pilastro i momenti agenti ( $M_{Ed,1,i,z}$  ed  $M_{Ed,1,s,z}$ ) per la CC17 risultano concordi. La trave di riferimento è la n.103 e il momento resistente con segno equilibrante  $M_{Ed,1,i,z}$  ed  $M_{Ed,1,s,z}$  è  $M_{Rd,103,1-4(-)}$ . Risultano i seguenti coefficienti amplificativi e relativi momenti di progetto:

$$\alpha_z = \gamma_{RD} \cdot M_{Rd,103,1-4(-)} / (|M_{Ed,1,i,z}| + |M_{Ed,1,s,z}|)$$

$$\alpha_z = 1.1 \cdot 6486.38 / (|+1562.25| + |-2533.20|) = 1.74$$

$$M_{Ed,1,i,z,ver} = \alpha_y \cdot M_{Ed,1,i,z} = 1.74 \cdot (+1562.25) = +2718.31 \text{ kgm}$$

$$M_{Ed,1,s,z,ver} = \alpha_y \cdot M_{Ed,1,s,z} = 1.74 \cdot (-2533.20) = -4407.77 \text{ kgm}$$

### Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$\alpha_y$	9.88	9.88
My ver. i	+1170.88 kgm	+1170.58 kgm
My ver. s	+4864.32 kgm	+4863.04 kgm
$\alpha_z$	1.74	1.74
Mz ver. i	+2718.31 kgm	+2721.50 kgm
Mz ver. s	-4407.77 kgm	-4412.92 kgm

### Calcolo teorico:

#### Pilastro n.2

Rispetto all'asse locale y del pilastro i momenti agenti ( $M_{Ed,2,i,y}$  ed  $M_{Ed,2,s,y}$ ) per la CC9 risultano concordi. La trave di riferimento è la n.101 e i momenti resistenti con segno equilibrante  $M_{Ed,2,i,y}$  ed  $M_{Ed,2,s,y}$  sono  $M_{Rd,101,2-1(-)}$  ed  $M_{Rd,101,2-3(+)}$ . Risultano i seguenti coefficienti amplificativi e relativi momenti di progetto:

$$\alpha_y = \gamma_{RD} \cdot (M_{Rd,101,2-1(-)} + M_{Rd,101,2-3(+)} / (|M_{Ed,2,i,y}| + |M_{Ed,2,s,y}|)$$

$$\alpha_y = 1.1 \cdot (5169.47 + 3716.82) / (|+661.34| + |-470.37|) = 8.64$$

$$M_{Ed,2,i,y,ver} = \alpha_y \cdot M_{Ed,2,i,y} = 8.64 \cdot (+661.34) = +5713.98 \text{ kgm}$$

$$M_{Ed,2,s,y,ver} = \alpha_y \cdot M_{Ed,2,s,y} = 8.64 \cdot (-470.37) = -4064.00 \text{ kgm}$$

Rispetto all'asse locale z del pilastro i momenti agenti ( $M_{Ed,2,i,z}$  ed  $M_{Ed,2,s,z}$ ) per la CC9 risultano concordi. La trave di riferimento è la n.104 e il momento resistente con segno equilibrante  $M_{Ed,1,i,z}$  ed  $M_{Ed,1,s,z}$  è  $M_{Rd,104,2-5(-)}$ . Risultano i seguenti coefficienti amplificativi e relativi momenti di progetto:

$$\alpha_z = \gamma_{RD} \cdot M_{Rd,104,2-5(-)} / (|M_{Ed,2,i,z}| + |M_{Ed,2,s,z}|)$$

$$\alpha_z = 1.1 \cdot 8179.80 / (|+603.11| + |-2909.99|) = 2.56$$

$$M_{Ed,2,i,z,ver} = \alpha_y \cdot M_{Ed,2,i,z} = 2.56 \cdot (+603.11) = +1543.96 \text{ kgm}$$

$$M_{Ed,2,s,z,ver} = \alpha_y \cdot M_{Ed,2,s,z} = 2.56 \cdot (-2909.99) = -7449.57 \text{ kgm}$$

### Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$\alpha_y$	8.64	8.64
My ver. i	+5713.98 kgm	+5712.95 kgm
My ver. s	-4064.00 kgm	-4063.24 kgm
$\alpha_z$	2.56	2.56
Mz ver. i	+1543.96 kgm	+1544.82 kgm
Mz ver. s	-7449.57 kgm	-7453.66 kgm

### Calcolo delle sovraresistenze:

Dai momenti di verifica precedentemente calcolati è possibile progettare i pilastri e verificare direttamente la (7.4.4) del § 7.4.4.2.1.

Effettuando le verifiche a pressoflessione deviata il pilastro n.1 risulta progettato con 1ø22 per ogni spigolo, i momenti ultimi per la CC17 risultano:

$$M_{Rd,1,i,y} = +3185.66 \text{ kgm} ; M_{Rd,1,s,y} = +5503.27 \text{ kgm}$$

$$M_{Rd,1,i,z} = +7420.14 \text{ kgm} ; M_{Rd,1,s,z} = -4823.03 \text{ kgm}$$

Il controllo rispetto all'asse y può essere effettuato calcolando la sovraresistenza come segue:

$$\max\{|M_{Rd,1,i,z}|; |M_{Rd,1,s,z}|\} / (\Sigma|M_{Rd,t}| + \min\{|M_{Ed,1,i,z}|; |M_{Ed,1,s,z}|\}) > \gamma_{RD}$$

$$|M_{Rd,1,s,z}| / (M_{Rd,101,1-2(-)} + |M_{Ed,1,i,z}|) > \gamma_{RD}$$

$$(|+5503.27|) / (4302.77 + |+118.51|) = 1.24 > 1.10$$

Il controllo rispetto all'asse z risulta direttamente dalla (7.4.4), la sovraresistenza vale:

$$\Sigma|M_{Rd,p}| / \Sigma|M_{Rd,t}| > \gamma_{RD}$$

$$(|M_{Rd,1,i,z}| + |M_{Rd,1,s,z}|) / (M_{Rd,103,1-4(-)}) > \gamma_{RD}$$

$$(|+7420.14| + |-4823.03|) / (6486.38) = 1.88 > 1.10$$

Il pilastro n.2 risulta progettato con 1ø18 per ogni spigolo e 1ø18 per ogni lato, i momenti ultimi per la CC9 risultano:

$$M_{Rd,2,i,y} = +9238.28 \text{ kgm} ; M_{Rd,2,s,y} = -4232.01 \text{ kgm};$$

$$M_{Rd,2,i,z} = +2331.25 \text{ kgm} ; M_{Rd,2,s,z} = -7484.86 \text{ kgm}.$$

Il controllo rispetto all'asse y risulta direttamente dalla (7.4.4), la sovraresistenza vale:

$$\Sigma|M_{Rd,p}| / \Sigma|M_{Rd,t}| > \gamma_{RD}$$

$$(|M_{Rd,2,i,y}| + |M_{Rd,2,s,y}|) / (M_{Rd,101,2-1(-)} + M_{Rd,101,2-3(+)} > \gamma_{RD}$$

$$(|+9238.28| + |-4232.01|) / (5169.47 + 3716.82) = 1.51 > 1.10$$

Il controllo rispetto all'asse z risulta direttamente dalla (7.4.4), la sovraresistenza vale:

$$\Sigma|M_{Rd,p}| / \Sigma|M_{Rd,t}| > \gamma_{RD}$$

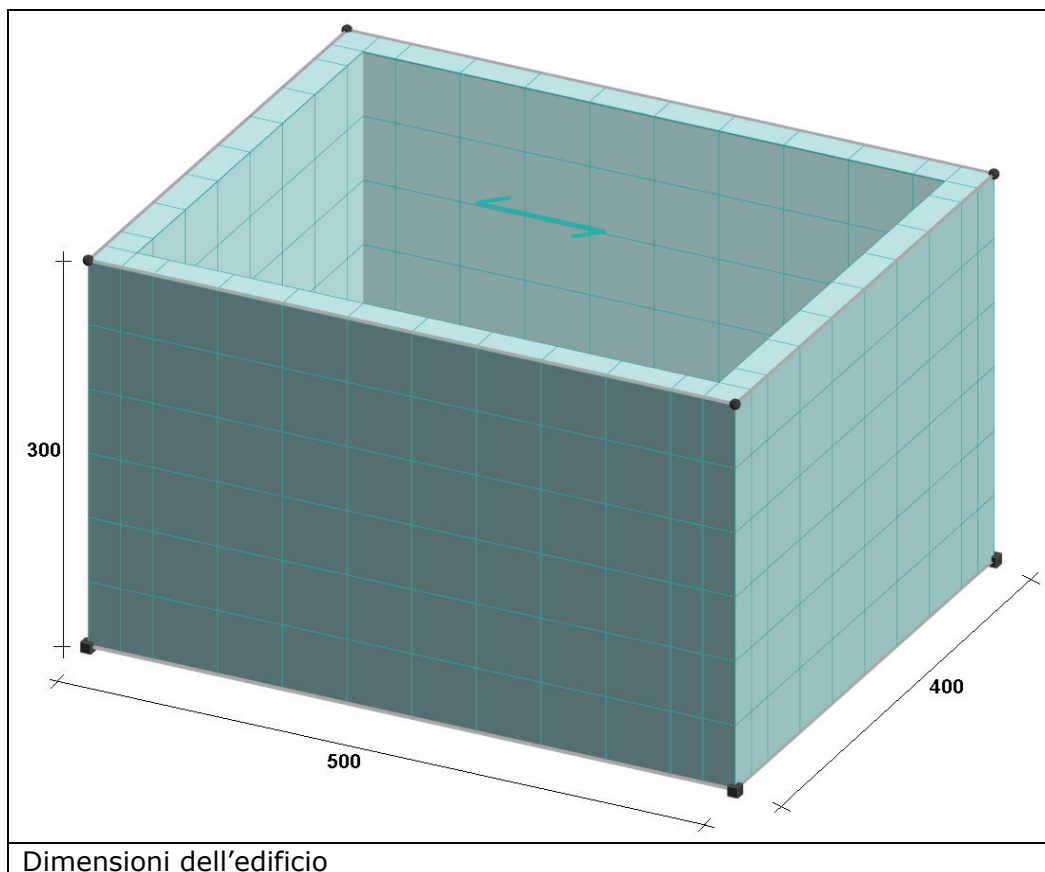
$$(|M_{Rd,2,i,z}| + |M_{Rd,2,s,z}|) / (M_{Rd,104,2-5(-)}) > \gamma_{RD}$$

$$(|+2331.25| + |-7484.86|) / (8179.80) = 1.20 > 1.10$$

# Analisi sismica statica non lineare delle murature

**Descrizione del problema:** analisi sismica statica non lineare (pushover), ai sensi del D.M. 14/01/08, di un edificio esistente in muratura ad un piano con pianta quadrata.

**Caratteristiche dell'edificio:** l'edificio a base rettangolare, con lati di 4 e 5 m e altezza di 3 m, è composto da pareti con spessore di 25 cm, come riportato nella seguente figura.



Il solaio ha carico permanente strutturale pari a  $300 \text{ kg/m}^2$ , carico permanente non strutturale pari a  $200 \text{ kg/m}^2$  e carico accidentale pari a  $200 \text{ kg/m}^2$  appartenente alla categoria dei carichi variabili "D.M. 08 Variabili Categoria A Ambienti ad uso residenziale".

**File:** [TestValidazione] – TVMUR1

**Caratteristiche dei materiali:** i valori delle caratteristiche meccaniche sono stati ricavati dalla tabella C8A.2.1 senza correggerli con i coefficienti della tabella C8A.2.2. Si ipotizza che il livello di conoscenza sia pari a LC2 a cui corrisponde un fattore di confidenza  $FC = 1.2$ .

Dalla tabella C8A.2.1 per "Muratura in mattoni pieni e malta di calce" si hanno le seguenti caratteristiche meccaniche:

- resistenza media a compressione:  $f_m (\text{min}) = 24 \text{ Kg/cm}^2$  ;  $f_m (\text{max}) = 40 \text{ Kg/cm}^2$
- resistenza media a taglio:  $\tau_0 (\text{min}) = 0.6 \text{ Kg/cm}^2$  ;  $\tau_0 (\text{max}) = 0.92 \text{ Kg/cm}^2$
- modulo di elasticità:  $E (\text{min}) = 12000 \text{ Kg/cm}^2$  ;  $E (\text{max}) = 18000 \text{ Kg/cm}^2$
- modulo elastico tangenziale:  $G (\text{min}) = 4000 \text{ Kg/cm}^2$  ;  $G (\text{max}) = 6000 \text{ Kg/cm}^2$
- peso specifico:  $\gamma = 1800 \text{ Kg/m}^3$

Poiché si è ipotizzato un livello di conoscenza LC2, come indicato nella tabella C8A.1.1, si adottano i valori medi sia per la resistenza che per i moduli di elasticità come di seguito riportato:

- resistenza media a compressione:  $f_m = 32 \text{ Kg/cm}^2$
- resistenza media a taglio:  $\tau_0 = 0.76 \text{ Kg/cm}^2$
- modulo di elasticità:  $E = 15000 \text{ Kg/cm}^2$
- modulo elastico tangenziale:  $G = 5000 \text{ Kg/cm}^2$
- peso specifico:  $\gamma = 1800 \text{ Kg/m}^3$

## Analisi teorica:

### Curva di capacità:

La curva di capacità è determinata ipotizzando che il collasso dell'edificio avvenga per rottura a taglio diagonale dei maschi murari (ipotesi ammissibile per un edificio esistente con maschi murari tozzi). Il limite per la deformazione ultima per collasso a taglio è pari 0.4 % l'altezza del maschio murario come indicato nel par. C8.7.1.4 della Circolare del D.M. 14/01/08 e il valore del limite elastico per la rottura a taglio è calcolato con la seguente formula:

$$V_t = l \cdot t \frac{1.5 \cdot \tau_{0d}}{b} \sqrt{1 + \frac{\sigma_0}{1.5 \cdot \tau_{0d}}} = l \cdot t \frac{f_{td}}{b} \sqrt{1 + \frac{\sigma_0}{1.5 \cdot f_{td}}}$$

Le condizioni di carico elementari considerate sono:

- 1 permanente strutturale del solaio
- 2 permanente non strutturale del solaio
- 3 accidentale del solaio

Combinazioni per S.L.U. sismico:

$$E + G_1 + G_2 + P + \Psi_{21} \cdot Q_{k1} + \Psi_{22} \cdot Q_{k2} + \dots$$

in cui:

$$G_1 = [\text{CCE1}] ; G_2 = [\text{CCE2}] ; Q_{k1} = [\text{CCE3}] ; Q_{k2} = [\text{CCE4}]$$

$$\Psi_{21(\text{CCE3})} = 0.3$$

Massa:

$W^{\text{QP sol}} =$	$1.0 \cdot [5.00 \cdot 4.00 \cdot 500] =$	10000.00	kg(f)
$W^{\text{QA sol}} =$	$0.3 \cdot [5.00 \cdot 4.00 \cdot 200] =$	1200.00	kg(f)
$W =$		11200.00	kg(f)
$MS =$	$11200.00 / 9.81 =$	1141.69	kg

Fattore di partecipazione modale:  $\Gamma = 1$

Essendo la struttura compatta e senza aperture, il carico del solaio si ripartisce sulle pareti non come carico unidirezionale ma bensì come bidirezionale (comportamento assimilabile ad una piastra) per cui il carico agente sulla parete di lato 4 m è pari a:

$$P = G_1 \cdot A + G_2 \cdot A + \Psi_{21} \cdot Q_{k1} \cdot A = 300 \cdot 4 \cdot 5/4 + 200 \cdot 4 \cdot 5/4 + 0.3 \cdot 200 \cdot 4 \cdot 5/4 = 3500 \text{ kg}$$

La tensione normale media ( $\sigma_0$ ), riferita all'area totale della sezione, è pari a:

$$\sigma_0 = \frac{P}{l \cdot t} = \frac{Q \cdot l}{l \cdot t} = \frac{3500}{400 \cdot 25} = 0.35 \text{ kg/cm}^2$$

Il limite elastico per la rottura a taglio della parete è pari a:

$$V_t = 1 \cdot t \cdot \frac{1.5 \cdot \frac{\tau_{0d}}{FC}}{b} \sqrt{1 + \frac{\sigma_0}{1.5 \cdot \frac{\tau_{0d}}{FC}}} = 400 \cdot 25 \cdot \frac{1.5 \cdot \frac{0.76}{1.2}}{1} \sqrt{1 + \frac{0.35}{1.5 \cdot \frac{0.76}{1.2}}} = 11113.06 \text{ kg}$$

Il limite per la deformazione ultima per collasso a taglio è pari:

$$\delta_u = 0.004 \cdot h = 0.004 \cdot 300 = 1.2 \text{ cm} = 12 \text{ mm}$$

Essendo il comportamento della parete di tipo elastico-perfettamente plastico con resistenza ultima uguale al limite elastico  $V_t$  e spostamento ultimo pari a  $\delta_u$ , ne consegue che lo spostamento ultimo e la resistenza massima della struttura sono pari a:

$$D_u = \delta_u = 12 \text{ mm}$$

$$F_{bu} = 2 \cdot V_t = 22226 \text{ kg}$$

Spostamento al limite elastico:

$$\delta = \frac{F_{bu} \cdot H^3}{3 \cdot E \cdot J} + \frac{F_{bu} \cdot H}{G \cdot A} = \frac{22226 \cdot 300^3}{3 \cdot 15000 \cdot 266666667} + \frac{22226 \cdot 300}{5000 \cdot 20000} = 0.117 \text{ cm} = 1.17 \text{ mm}$$

Sistema equivalente ad un grado di libertà:

Resistenza massima:

$$F_{bu}^* = \frac{F_{bu}}{\Gamma} = 22226 \text{ kg}$$

Spostamento ultimo:

$$\delta_u^* = \frac{\delta_u}{\Gamma} = 12 \text{ mm}$$

Bilineare equivalente:

Massa equivalente:

$$m^* = \frac{M}{\Gamma} = \frac{1141.69}{1} = 1141.69 \text{ kg}$$

Spostamento al limite elastico:

$$\delta_y^* = \delta = 1.17 \text{ mm}$$

Rigidezza al limite elastico:

$$K^* = \frac{F_{bu}^*}{\delta_y^*} = \frac{22226}{0.00117} = 18996581.20 \text{ kg/m}$$

Periodo elastico:

$$T^* = 2\pi \sqrt{\frac{m^*}{K^*}} = 0.049 \text{ sec}$$



## Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$F_{bu}$	22226 kg (f)	22954.30 kg (f)
$\delta_u$	12 mm	11.94 mm

## Output ModeSt:

### Relazione di calcolo:

#### Sisma +Y Gruppo 2

Distribuzione di forze uniforme

Percentuale di massa movimentata in direzione del sisma:100.00

Imp. cx cy  
1 1.00 1.00

#### Risultati analisi statica non lineare

Resistenza massima:  $F_{bu} = 22954.30 <kg>$   
Spostamento ultimo:  $\delta_u = 11.94 <mm>$   
Fattore di partecipazione modale:  $\Gamma = 1.00$

#### Sistema equivalente ad un grado di libertà

Resistenza massima:  $F_{bu}^* = 22954.30 <kg>$   
Spostamento ultimo:  $\delta_u^* = 11.94 <mm>$

#### Curva bilineare equivalente

Forza di snervamento:  $F_Y^* = 22905.90 <kg>$   
Spostamento al limite elastico:  $\delta_y^* = 1.20 <mm>$   
Massa equivalente:  $m^* = 1141.69 <kg>$   
Rigidezza:  $k^* = 19047900.00 <kg/m>$   
Periodo elastico:  $T^* = 0.049 <sec>$   
Sovreresistenza:  $\alpha_u/\alpha_1 = 0.90$

# Verifiche geotecniche di una fondazione superficiale

**Caratteristiche della fondazione:** la fondazione è rappresentata da un plinto le cui dimensioni dell'impronta sono  $B = L = 1.50$  m; mentre l'altezza è pari a 0.5 m. Il plinto è alla base del pilastro n.2 della struttura TVDM08CA, in cui la direzione di B è parallela all'asse X globale e la direzione di L è parallela all'asse Y.

Le verifiche di capacità portante verranno fatte secondo l'approccio 2.

**Terreno di fondazione:** I parametri geotecnici caratteristici sono i seguenti:

Peso specifico del terreno naturale	$\gamma$	=	20	kN/m <sup>3</sup>
Peso specifico del terreno saturo	$\gamma_{sat}$	=	21	kN/m <sup>3</sup>
Angolo di attrito efficace	$\phi$	=	30	°
Coesione efficace	$c'$	=	5	kPa
Coesione non drenata	$c_u$	=	80	kPa
Modulo elastico	$E$	=	20	MPa
Modulo elastico tangenziale	$G$	=	8	MPa

Secondo l'approccio 2 i coefficienti parziali sui materiali  $\gamma_M$  sono unitari, pertanto i parametri di progetto coincidono con i parametri caratteristici.

Il piano di campagna è all'estradosso del plinto, la profondità del piano di posa è quindi  $D = 0.5$  m; la falda è presente alla profondità pari a  $z_f = 1$  m dal piano di campagna.

**Sollecitazioni:** Le sollecitazioni di progetto sono rappresentate dalle reazioni vincolari del nodo n.2 della struttura TVDM08CA. Tali effetti dei carichi rappresentano già i valori di progetto per il calcolo con l'approccio 2. Dal paragrafo relativo alla "Generazione delle combinazioni di carico" del test "Analisi dei carichi per un'analisi sismica statica lineare, ai sensi del D.M. 08, di un edificio in c.a.", per la struttura in oggetto, sono desumibili i coefficienti parziali sulle azioni  $\gamma_A$ .

**File:** [TestValidazione] - TVDM08CA

## Calcolo teorico:

Per le verifiche agli SLU statici consideriamo i carichi risultanti dalla CC33. Per ottenere i momenti di progetto occorre sommare, al momento di incastro, il momento generato dal taglio per l'altezza del plinto, risultano quindi le seguenti sollecitazioni di progetto:

$$\begin{aligned}N &= R_z = +35538.70 \text{ kg} \\T_x &= R_x = -225.44 \text{ kg} \\T_y &= R_y = +2241.30 \text{ kg} \\M_x &= M_x - H \cdot R_y = -2187.34 - 0.5 \cdot (+2241.30) = -3307.99 \text{ kgm} \\M_y &= M_y + H \cdot R_x = -359.144 + 0.5 \cdot (-225.44) = -471.86 \text{ kgm}\end{aligned}$$

Le dimensioni della fondazione reagente risultano:

$$\begin{aligned}B' &= \min\{B - 2 \cdot |M_x|/N ; L - 2 \cdot |M_y|/N\} \\L' &= \max\{B - 2 \cdot |M_x|/N ; L - 2 \cdot |M_y|/N\} \\B' &= \min\{1.5 - 2 \cdot 3307.99 / 35538.70 ; 1.5 - 2 \cdot 471.86 / 35538.70\} = 1.31 \text{ m} \\L' &= \max\{1.5 - 2 \cdot 3307.99 / 35538.70 ; 1.5 - 2 \cdot 471.86 / 35538.70\} = 1.47 \text{ m}\end{aligned}$$

La profondità di interesse delle superfici di rottura, dal piano di posa delle fondazioni, è stimata pari a:  $z_i = (B/2) \cdot \tan(\pi/4 + \phi/2) = (1.5/2) \cdot \tan(60^\circ) = 1.3$  m. La falda è presente ad una profondità dal piano di posa delle fondazioni pari a  $z_f - D = 1.5 - 0.5 = 0.5$  m, risultando  $z_i > z_f - D > 0$ , il peso specifico rappresentativo del terreno di fondazione  $\gamma_r$  risulta pari a:

$$\begin{aligned}\gamma_r &= [\gamma \cdot (z_f - D) + (\gamma_{sat} - \gamma_w) \cdot (z_i - (z_f - D))] / z_i \\ \gamma_r &= [20 \cdot 0.5 + (21 - 10) \cdot (1.3 - 0.5)] / 1.3 = 14.4615 \text{ kN/m}^3 = 1446.15 \text{ kN/m}^3\end{aligned}$$

La pressione litostatica verticale totale alla profondità del piano di posa della fondazione, rappresentativa del peso del terreno a lato del plinto vale:

$$\sigma_{v0,f} = \gamma \cdot D = 20 \cdot 0.5 = 10 \text{ kN/m}^3 = 1000 \text{ kg/m}^3$$

Il coefficiente di spinta passiva del terreno di fondazione vale:

$$k_p = [1 + \tan(\varphi)] / [1 - \tan(\varphi)] = [1 + \tan(30^\circ)] / [1 - \tan(30^\circ)] = 3.00$$

La risultante delle azioni orizzontali è pari a:

$$H = \text{radq}[T_x^2 + T_y^2] = \text{radq}[(-225.44)^2 + (+2241.30)^2] = 2252.61 \text{ kg}$$

L'angolo fra la direzione della risultante delle azioni orizzontali e la direzione in cui si sviluppa L' (nel caso specifico la direzione dell'asse X globale) è pari a:

$$\theta_{HL} = \arctan[T_y/T_x] = \arctan[(2241.30)/(-225.44)] \sim -84^\circ$$

Il fattore di direzione del carico orizzontale risulta quindi:

$$\begin{aligned} m &= [(2+B'/L')/(1+B'/L')] \cdot \sin^2(\theta_{HL}) + [(2+L'/B')/(1+L'/B')] \cdot \cos^2(\theta_{HL}) \\ m &= [(2+1.31/1.47)/(1+1.31/1.47)] \cdot 0.99 + [(2+1.47/1.31)/(1+1.47/1.31)] \cdot 0.01 \\ m &= 1.52 \end{aligned}$$

L'adesione fra la fondazione e il terreno in condizioni drenate è stimata pari alla coesione efficace ( $a' = c' = 5 \text{ kPa} = 500 \text{ kg/m}^2$ ), mentre in condizioni non drenate è stimata pari alla coesione non drenata ( $a_u = c_u = 80 \text{ kPa} = 8000 \text{ kg/m}^2$ ). L'angolo d'attrito fra la fondazione e il terreno è pari all'angolo d'attrito del terreno ( $\delta = \varphi = 30^\circ$ ). Il piano di posa della fondazione ha inclinazione nulla ( $\eta = 0.00$ ).

#### Verifiche di capacità portante per rottura generale in condizioni statiche

Il calcolo della capacità portante viene effettuato con la relazione trinomia proposta nell'allegato D dell'EC7, le relazioni trinomie scompongono la capacità portante in tre termini rappresentativi del sovraccarico laterale e della coesione e del peso del terreno di fondazione. Per le verifiche in condizioni drenate risulta:

$$q_{lim} = \sigma_{v0,f} \cdot N_q \cdot s_q \cdot i_q \cdot b_q + c' \cdot N_c \cdot s_c \cdot i_c \cdot b_c + (B'/2) \cdot \gamma_r \cdot N_\gamma \cdot s_\gamma \cdot i_\gamma \cdot b_\gamma$$

In cui:

$$\begin{aligned} N_q &= \exp[\pi \cdot \tan(\varphi)] \cdot k_p = \exp[3.14 \cdot \tan(30^\circ)] \cdot 3 = 18.40 \\ N_c &= (N_q - 1) / \tan(\varphi) = (18.40 - 1) / \tan(30^\circ) = 30.14 \\ N_\gamma &= 2 \cdot (N_q - 1) \cdot \tan(\varphi) = 2 \cdot (18.40 - 1) \cdot \tan(30^\circ) = 20.09 \\ s_q &= 1 + (B'/L') \cdot \sin(\varphi) = 1 + (1.31/1.47) \cdot \sin(30^\circ) = 1.45 \\ s_c &= (s_q \cdot N_q - 1) / (N_q - 1) = (1.45 \cdot 18.40 - 1) / (18.40 - 1) = 1.48 \\ s_\gamma &= 1 - 0.3 \cdot (B'/L') = 1 - 0.3 \cdot (1.31/1.47) = 0.73 \\ i_q &= [1 - H / (N + B' \cdot L' \cdot a' / \tan(\varphi))]^m = \\ &= [1 - 2252.61 / (35538.70 + 1.31 \cdot 1.47 \cdot 500 / \tan(30^\circ))]^{1.52} = 0.91 \\ i_c &= i_q - (1 - i_q) / (N_q - 1) = 0.91 - (1 - 0.91) / (18.40 - 1) = 0.91 \\ i_\gamma &= [1 - H / (N + B' \cdot L' \cdot a' / \tan(\varphi))]^{m+1} = \\ &= [1 - 2252.61 / (35538.70 + 1.31 \cdot 1.47 \cdot 500 / \tan(30^\circ))]^{1.52+1} = 0.86 \\ b_q &= [1 - \eta \cdot \tan(\varphi)]^2 = [1 - 0.00 \cdot \tan(30^\circ)]^2 = 1.00 \\ b_c &= b_q - (1 - b_q) / (N_q - 1) = 1.00 - (1 - 1.00) / (18.40 - 1) = 1.00 \\ b_\gamma &= [1 - \eta \cdot \tan(\varphi)]^2 = [1 - 0.00 \cdot \tan(30^\circ)]^2 = 1.00 \end{aligned}$$

La pressione limite è pari a:

$$\begin{aligned} q_{lim} &= \sigma_{v0,f} \cdot N_q \cdot s_q \cdot i_q \cdot b_q + c' \cdot N_c \cdot s_c \cdot i_c \cdot b_c + (B'/2) \cdot \gamma_r \cdot N_\gamma \cdot s_\gamma \cdot i_\gamma \cdot b_\gamma \\ q_{lim} &= 1000.00 \cdot 18.40 \cdot 1.45 \cdot 0.91 \cdot 1.00 + \\ &+ 500.00 \cdot 30.14 \cdot 1.48 \cdot 0.91 \cdot 1.00 + \\ &+ (1.31/2) \cdot 1446.15 \cdot 20.09 \cdot 0.73 \cdot 0.86 \cdot 1.00 \\ q_{lim} &= 24278.80 + 20296.28 + 11946.92 = 56522.00 \text{ kg/m}^2 \end{aligned}$$

Per verifiche secondo l'approccio 2, con un fattore di sicurezza parziale sulle resistenze pari a  $\gamma_R = 2.3$ , la resistenza di progetto risulta:

$$R_d = B' \cdot L' \cdot q_{lim} / \gamma_R = 1.31 \cdot 1.47 \cdot 56522.00 / 2.3 = 47323.66 \text{ kg}$$

Considerando lo sforzo normale come effetto delle azioni di progetto:

$$E_d = N = 35538.70 \text{ kg}$$

La sicurezza risulta:

$$sic. = R_d / E_d = 47323.66 / 35538.70 = 1.33$$

#### Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$R_d$	47323.66 kg	47444.60 kg
$Sic.$	1.33	1.34

Per le verifiche in condizioni non drenate il calcolo della capacità portante risulta:

$$q_{lim} = \sigma_{v0,f} \cdot N_q + c_u \cdot N_c \cdot s_c \cdot i_c \cdot b_c$$

In cui:

$$N_q = 1.00$$

$$N_c = 2 + n = 5.14$$

$$s_c = 1 + 2 \cdot B' / L' = 1 + 0.2 \cdot 1.31 / 1.47 = 1.18$$

$$i_c = 0.5 \cdot \{1 + \text{radq}[1 - H / (B' \cdot L' \cdot a_u)]\} =$$

$$= 0.5 \cdot \{1 + \text{radq}[1 - 2252.61 / (1.31 \cdot 1.47 \cdot 8000.00)]\} = 0.96$$

$$b_c = 1 - 2 \cdot \eta \cdot (1 + n) = 1 - 2 \cdot 0.00 \cdot 3.14 = 1.00$$

La pressione limite è pari a:

$$q_{lim} = \sigma_{v0,f} \cdot N_q + c_u \cdot N_c \cdot s_c \cdot i_c \cdot b_c$$

$$q_{lim} = 1000.00 \cdot 1.00 + 8000.00 \cdot 5.14 \cdot 1.18 \cdot 0.96 \cdot 1.00 = 47580.74 \text{ kg/m}^2$$

Per verifiche secondo l'approccio 2, con un fattore di sicurezza parziale sulle resistenze pari a  $\gamma_R = 2.3$ , la resistenza di progetto risulta:

$$R_d = B' \cdot L' \cdot q_{lim} / \gamma_R = 1.31 \cdot 1.47 \cdot 47580.74 / 2.3 = 39837.49 \text{ kg}$$

Considerando lo sforzo normale come effetto delle azioni di progetto:

$$E_d = N = 35538.70 \text{ kg}$$

La sicurezza risulta:

$$sic. = R_d / E_d = 39837.49 / 35538.70 = 1.12$$

#### Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$R_d$	39837.49 kg	40094.80 kg
$Sic.$	1.12	1.13

#### Calcolo teorico:

##### Verifiche di capacità portante per punzonamento

La verifica a rottura per punzonamento viene effettuata con il metodo proposto da Vesic (1975), per cui il fenomeno di rottura in oggetto è governato dall'indice di rigidezza  $I_r$ . La rottura per punzonamento è possibile solo se l'indice di rigidezza supera il valore critico  $I_{r,crit}$ , in tal caso la verifica verrà effettuata con la relazione trinomia proposta da

Vesic (1973), in cui i termini rappresentativi del sovraccarico laterale e della coesione e del peso del terreno di fondazione sono moltiplicati da ulteriori fattori riduttivi valutati in funzione dell'indice di rigidezza. In condizioni drenate l'indice di rigidezza vale:

$$I_r = G/[c' + \sigma'_{v0(D+B/2)} \cdot \tan(\varphi)]$$

In cui:

$$\sigma'_{v0(D+B/2)} = \gamma \cdot z_f + (\gamma_{sat} - \gamma_w) \cdot (D + B/2 - z_f) = 20 \cdot 1 + (21 - 10) \cdot (0.5 + 1.5/2 - 1) = 22.75 \text{ kPa}$$

L'indice di rigidezza risulta:

$$I_r = G/[c' + \sigma'_{v0(D+B/2)} \cdot \tan(\varphi)] = 8000/[5 + 22.75 \cdot \tan(30^\circ)] = 441.14$$

L'indice di rigidezza critico vale:

$$\begin{aligned} I_{r,crit} &= (1/2) \cdot \exp\{[3.30 - 0.45 \cdot B/L]/\tan(\pi/4 - \varphi/2)\} = \\ &= 0.5 \cdot \exp\{[3.30 - 0.45 \cdot 1.5/1.5]/\tan(45 - 30/2)\} = 69.63 \end{aligned}$$

Risulta:

$$I_r = 441.14 > 69.63 = I_{r,crit}$$

Il meccanismo di rottura per punzonamento non è attivabile e la verifica è soddisfatta.

**Risultati:**

	Valore teorico	ModeSt
$I_r$	441.14	441.14
$I_{r,crit}$	69.63	69.63

Dato il modulo elastico non drenato  $E_u = 3 \cdot G = 3 \cdot 8 = 24 \text{ MPa}$ , in condizioni non drenate l'indice di rigidezza risulta:

$$I_r = (E_u/3)/c_u = (24000/3)/80 = 100.00$$

L'indice di rigidezza critico vale:

$$I_{r,crit} = (1/2) \cdot \exp\{3.30 - 0.45 \cdot B/L\} = 0.5 \cdot \exp\{3.30 - 0.45 \cdot 1.5/1.5\} = 8.64$$

Risulta:

$$I_r = 100.00 > 8.64 = I_{r,crit}$$

Il meccanismo di rottura per punzonamento non è attivabile e la verifica è soddisfatta.

**Risultati:**

	Valore teorico	ModeSt
$I_r$	100.00	100.00
$I_{r,crit}$	8.64	8.64

**Calcolo teorico:**

Verifiche di capacità portante per scorrimento

In condizioni drenate la resistenza di progetto ha una componente dovuta alla coesione ed una, dipendente dallo sforzo di compressione, dovuta all'attrito fra fondazione e terreno. Per verifiche secondo l'approccio 2, con un fattore di sicurezza parziale sulle resistenze pari a  $\gamma_R = 1.1$ , la resistenza di progetto risulta:

$$\begin{aligned} R_d &= [a' \cdot B' \cdot L' + N \cdot \tan(\delta)]/\gamma_R = \\ &= [500 \cdot 1.31 \cdot 1.47 + 35538.70 \cdot \tan(30^\circ)]/1.1 = 19528.30 \text{ kg} \end{aligned}$$

L'effetto delle azioni di progetto, dato dalla risultante delle azioni orizzontali, è pari a:

$$E_d = H = 2252.61 \text{ kg}$$

La sicurezza risulta:

$$\text{sic.} = R_d/E_d = 19528.30/2252.61 = 8.67$$

#### Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$R_d$	19528.30 kg	19532.90 kg
Sic.	8.67	8.67

In condizioni non drenate la resistenza di progetto ha la sola componente dovuta alla coesione. Per verifiche secondo l'approccio 2, con un fattore di sicurezza parziale sulle resistenze pari a  $\gamma_R = 1.1$ , la resistenza di progetto risulta:

$$R_d = [a_u \cdot B' \cdot L'] / \gamma_R = [8000 \cdot 1.31 \cdot 1.47] / 1.1 = 14005.09 \text{ kg}$$

L'effetto delle azioni di progetto, dato dalla risultante delle azioni orizzontali, è pari a:

$$E_d = H = 2252.61 \text{ kg}$$

La sicurezza risulta:

$$\text{sic.} = R_d/E_d = 14005.09/2252.61 = 8.67$$

#### Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$R_d$	14005.09 kg	14079.00 kg
Sic.	6.21	6.25

Per le verifiche agli SLU sismici (SLV) consideriamo i carichi risultanti dalla CC1. Per ottenere i momenti di progetto occorre sommare, al momento di incastro, il momento generato dal taglio per l'altezza del plinto. Tutte le componenti delle reazioni vincolari sono incrementate del fattore  $\gamma_{Rd} = 1.1$  (prescrizioni del §7.2.5 per edifici in classe di duttilità B). Risultano quindi le seguenti sollecitazioni di progetto:

$$N = 1.1 \cdot R_z = 1.1 \cdot 22590.40 = +24849.44 \text{ kg}$$

$$T_x = 1.1 \cdot R_x = 1.1 \cdot (-1860.67) = -2046.74 \text{ kg}$$

$$T_y = 1.1 \cdot R_y = 1.1 \cdot (+739.68) = +813.65 \text{ kg}$$

$$M_x = 1.1 \cdot M_x - H \cdot 1.1 \cdot R_y = 1.1 \cdot (-324.69) - 0.5 \cdot 1.1 \cdot (+739.68) = -763.98 \text{ kgm}$$

$$M_y = 1.1 \cdot M_y + H \cdot 1.1 \cdot R_x = 1.1 \cdot (-3009.12) + 0.5 \cdot 1.1 \cdot (-1860.67) = -4333.40 \text{ kgm}$$

Le dimensioni della fondazione reagente risultano:

$$B' = \min\{B - 2 \cdot |M_x|/N ; L - 2 \cdot |M_y|/N\}$$

$$L' = \max\{B - 2 \cdot |M_x|/N ; L - 2 \cdot |M_y|/N\}$$

$$B' = \min\{1.5 - 2 \cdot 763.98/24849.44 ; 1.5 - 2 \cdot 4333.40/24849.44\} = 1.15 \text{ m}$$

$$L' = \max\{1.5 - 2 \cdot 763.98/24849.44 ; 1.5 - 2 \cdot 4333.40/24849.44\} = 1.44 \text{ m}$$

#### Calcolo teorico:

##### Verifiche di capacità portante per rottura generale in condizioni sismiche

Il calcolo della capacità portante viene effettuato con la relazione trinomia proposta da Richards R. Jr., Elms D.G. e Budhu M. (1993), per l'utilizzo di tale relazione è necessario calcolare l'angolo che definisce la zona di spinta attiva  $p_{ae}$  ed i coefficienti di spinta attiva e passiva comprensivi del contributo dovuto alle forze d'inerzia agenti sul volume di terreno a rottura, rispettivamente  $k_{pe}$  ed  $k_{ae}$ . Tali valori vengono calcolati partendo dall'accelerazione sismica orizzontale e verticale normalizzate con l'accelerazione di

gravità, rispettivamente  $k_h$  e  $k_v$ . Per l'SLV l'azione sismica risulta avere  $a_g/g = 0.1397$ , il coefficiente della categoria di sottosuolo e delle condizioni topografiche fornisce  $S = S_S \cdot S_T = 1.0 \cdot 1.0 = 1.0$ , risulta pertanto:

$$\begin{aligned}k_h &= (a_g/g) \cdot S = 0.1397 \cdot 1.00 = 0.1397 \\k_v &= 1.35 \cdot k_h \cdot \text{radq}(a_g/g) = 1.35 \cdot 0.1397 \cdot \text{radq}(0.1397) = 0.0705 \\a &= \arctan[k_h/(1-k_v)] = \arctan[0.1397/(1-0.0705)] = 0.1492 \text{ rad}\end{aligned}$$

Dati l'angolo d'attrito fra la fondazione e il terreno e l'angolo d'attrito del terreno pari a:  $\delta = \varphi = 30^\circ = 0.5236 \text{ rad}$ , è possibile calcolare:

$$\begin{aligned}\Phi &= \varphi - a = 0.5236 - 0.1492 = 0.3744 \text{ rad} \\c_k &= \text{radq}[\sin(\varphi + \delta) \cdot \sin(\Phi) / \cos(\delta + a)] = \\&= \text{radq}[\sin(0.5236 + 0.5236) \cdot \sin(0.3744) / \cos(0.5236 + 0.1492)] = 0.6364 \\a_a &= \text{radq}\{[1 + \tan^2(\Phi)] \cdot [(1 + \tan(\delta + a) / \tan(\Phi))] - \tan(\Phi)\} = \\&= \text{radq}\{[1 + \tan^2(0.3744)] \cdot [(1 + \tan(0.5236 + 0.1492) / \tan(0.3744))] - \tan(0.3744)\} = 1.4766 \\b &= 1 + \tan(\delta + a) \cdot [\tan(\Phi) + 1 / \tan(\Phi)] = \\&= 1 + \tan(0.5236 + 0.1492) \cdot [\tan(0.3744) + 1 / \tan(0.3744)] = 3.3409 \\\rho_{ae} &= +\Phi + \arctan(a_a/b) = +0.3744 + \arctan(1.4766/3.3409) = 0.7906 \\k_{ae} &= [\cos^2(\Phi)] / [\cos(a) \cdot \cos(\delta + a) \cdot (1 + c_k)^2] = \\&= [\cos^2(0.3744)] / [\cos(0.1492) \cdot \cos(0.5236 + 0.1492) \cdot (1 + 0.6364)^2] = 0.4183 \\k_{pe} &= [\cos^2(\Phi)] / [\cos(a) \cdot \cos(\delta + a) \cdot (1 - c_k)^2] = \\&= [\cos^2(0.3744)] / [\cos(0.1492) \cdot \cos(0.5236 + 0.1492) \cdot (1 - 0.6364)^2] = 8.4722\end{aligned}$$

Il calcolo della capacità portante risulta:

$$q_{lim} = \sigma_{v0,f} \cdot N_q + c' \cdot N_c + (B'/2) \cdot \gamma_r \cdot N_\gamma$$

In cui:

$$\begin{aligned}N_q &= k_{pe}/k_{ae} = 8.4722/0.4183 = 20.25 \\N_c &= (N_q - 1) / \tan(\varphi) = (20.25 - 1) / \tan(0.5236) = 33.34 \\N_\gamma &= 2 \cdot (N_q - 1) \cdot \tan(\rho_{ae}) = (20.25 - 1) \cdot \tan(0.7906) = 19.45\end{aligned}$$

La pressione limite è pari a:

$$\begin{aligned}q_{lim} &= \sigma_{v0,f} \cdot N_q + c' \cdot N_c + (B'/2) \cdot \gamma_r \cdot N_\gamma \\q_{lim} &= 1000.00 \cdot 20.25 + 500.00 \cdot 33.34 + (1.15/2) \cdot 1446.15 \cdot 19.45 \\q_{lim} &= 20250.00 + 16670.00 + 16173.38 = 53093.38 \text{ kg/m}^2\end{aligned}$$

Per verifiche sismiche il fattore di sicurezza parziale sulle resistenze è comunque pari a  $\gamma_R = 2.3$ , la resistenza di progetto risulta:

$$R_d = B' \cdot L' \cdot q_{lim} / \gamma_R = 1.15 \cdot 1.44 \cdot 53093.38 / 2.3 = 38227.23 \text{ kg}$$

Considerando lo sforzo normale come effetto delle azioni di progetto:

$$E_d = N = 24849.44 \text{ kg}$$

La sicurezza risulta:

$$\text{sic.} = R_d / E_d = 38227.23 / 24849.44 = 1.54$$

## Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$R_d$	38227.23 kg	38245.10 kg
Sic.	1.54	1.54

## Calcolo teorico:

### Calcolo dei cedimenti e della costane di sottofondo

I cedimenti elastici ( $\Delta H$ ) vengono determinati calcolando il cedimento atteso in funzione della pressione di contatto fra terreno e fondazione che ne è la causa ( $q_{es}$ ) utilizzando un'equazione della teoria dell'elasticità (Bowles, 1999). La relazione elastica utilizzata è la seguente (Timoshenko e Goodier, 1951):

$$Ced. = q_{es} \cdot [4 \cdot (B/2) \cdot (1 - \mu^2) / E] \cdot I_s \cdot I_f$$

in cui il modulo elastico del terreno di fondazione vale  $E = 20 \text{ MPa} = 2000000 \text{ kg/m}^2$ , mentre il coefficiente di Poisson vale:

$$\mu = (1/2) \cdot (E/G) - 1 = (1/2) \cdot (20/8) - 1 = 0.25$$

Ipotizzando lo spessore di terreno interessato dalle deformazioni  $H$  pari a 5 volte la base del plinto:

$$H = 5 \cdot B = 5 \cdot 1.5 = 7.5 \text{ m}$$

Ed effettuando la valutazione in relazione al centro della fondazione, il coefficiente di influenza  $I_s$  viene calcolato dai seguenti parametri:

$$n = H/(B/2) = 7.5/(1.5/2) = 10$$

$$m = (L/2)/(B/2) = L/B = 1.5/1.5 = 1$$

$$a = [1 + \text{radq}(m^2 + 1)] \cdot \text{radq}(m^2 + n^2) = [1 + \text{radq}(1^2 + 1)] \cdot \text{radq}(1^2 + 10^2) = 24.2625$$

$$b = m \cdot [1 + \text{radq}(m^2 + n^2 + 1)] = 1 \cdot [1 + \text{radq}(1^2 + 10^2 + 1)] = 11.0995$$

$$c = [m + \text{radq}(m^2 + 1)] \cdot \text{radq}(1 + n^2) = [1 + \text{radq}(1^2 + 1)] \cdot \text{radq}(1 + 10^2) = 24.2625$$

$$d = m + \text{radq}(m^2 + n^2 + 1) = 1 + \text{radq}(1^2 + 10^2 + 1) = 11.0995$$

$$I_1 = [m \cdot \ln(a/b) + \ln(c/d)] / n =$$

$$= [1 \cdot \ln(24.2625/11.0995) + \ln(24.2625/11.0995)] / 3.14 = 0.4978$$

$$I_2 = \arctan\{[m / (n \cdot \text{radq}(m^2 + n^2 + 1))]\} \cdot n / (2 \cdot n) =$$

$$= \arctan\{[1 / (10 \cdot \text{radq}(1^2 + 10^2 + 1))]\} \cdot 10 / (2 \cdot 3.14) = 0.0158$$

$$I_s = I_1 + [(1 - 2 \cdot \mu) / (1 - \mu)] \cdot I_2 = 0.4978 + [(1 - 2 \cdot 0.25) / (1 - 0.25)] \cdot 0.0158 = 0.5083 \sim 0.51$$

Dato il rapporto di profondità  $D/B = 0.5/1.5 = 0.33$  ed il rapporto fra i lati della fondazione  $L/B = 1.5/1.5 = 1.00$ , il valore del coefficiente di profondità è stimato pari a:

$$I_f = 0.81$$

Per il calcolo dei cedimenti consideriamo i carichi risultanti dalla CC37 (SLE R). L'azione di progetto è data dalla reazione vincolare all'incastro e vale:

$$N = R_z = +25495.20 \text{ kg}$$

Da cui la tensione di esercizio vale:

$$q_{es} = N / (B \cdot L) = 25495.20 / (1.5 \cdot 1.5) = 11331.20 \text{ kg/m}^2$$

Il cedimento calcolato risulta pertanto:

$$Ced. = q_{es} \cdot [4 \cdot (B/2) \cdot (1 - \mu^2) / E] \cdot I_s \cdot I_f$$

$$Ced. = 11331.20 \cdot [4 \cdot (1.5/2) \cdot (1 - 0.25^2) / 2000000] \cdot 0.51 \cdot 0.81$$

$$Ced. = 0.006583 \text{ m} \sim 0.66 \text{ cm}$$

Ipotizzando la profondità di interesse delle deformazioni indipendente dalle pressioni agenti è possibile calcolare la costante di sottofondo  $k_w$  rappresentativa della fondazione in oggetto:

$$k_w = q_{es} / Ced. = 1 / \{ [4 \cdot (B/2) \cdot (1 - \mu^2) / E] \cdot I_s \cdot I_f \}$$

$$k_w = 1 / \{ [4 \cdot (1.5/2) \cdot (1 - 0.25^2) / 2000000] \cdot 0.51 \cdot 0.81 \} = 1727159.06 \text{ kg/m}^3$$

## Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
Ced.	0.66 cm	0.66 cm



kw	1727159.06 kg/m <sup>3</sup>	1726520.00 kg/m <sup>3</sup>
----	------------------------------	------------------------------

# Verifiche geotecniche di una fondazione profonda

**Caratteristiche della fondazione:** la fondazione è rappresentata da un palo trivellato di diametro  $D_p = 0.5$  m e lunghezza  $L_p = 10$  m. Il palo è alla base del pilastro n.5 della struttura TVDM08CA.

Le verifiche di capacità portante verranno fatte secondo l'approccio 2.

**Terreno di fondazione:** I parametri geotecnici caratteristici sono i seguenti:

Peso specifico del terreno naturale	$\gamma$	=	20	kN/m <sup>3</sup>
Peso specifico del terreno saturo	$\gamma_{sat}$	=	21	kN/m <sup>3</sup>
Angolo di attrito efficace	$\varphi$	=	30	°
Coesione efficace	$c'$	=	5	kPa
Coesione non drenata	$c_u$	=	80	kPa
Grado di sovraconsolidazione	OCR	=	1	
Coeff. di spinta a riposo	$k_0$	=	0.5	
Modulo elastico	$E$	=	20	MPa
Modulo elastico tangenziale	$G$	=	8	MPa

Secondo l'approccio 2 i coefficienti parziali sui materiali  $\gamma_M$  sono unitari, pertanto i parametri di progetto coincidono con i parametri caratteristici.

Il piano di campagna è alla quota di testa del palo e la falda è coincidente con il piano di campagna.

**Sollecitazioni:** Le sollecitazioni di progetto sono rappresentate dalle reazioni vincolari del nodo n.5 della struttura TVDM08CA. Tali effetti dei carichi rappresentano già i valori di progetto per il calcolo con l'approccio 2. Dal paragrafo relativo alla "Generazione delle combinazioni di carico" del test "Analisi dei carichi per un'analisi sismica statica lineare, ai sensi del D.M. 08, di un edificio in c.a.", per la struttura in oggetto, sono desumibili i coefficienti parziali sulle azioni  $\gamma_A$ .

**File:** [TestValidazione] - TVDM08CA

## Calcolo teorico:

Per le verifiche agli SLU (analoghe per carichi statici e sismici) consideriamo i carichi risultanti dalla CC1 (SLV). Considerando una condizione sismica tutte le componenti delle reazioni vincolari sono incrementate del fattore  $\gamma_{Rd} = 1.1$  (prescrizioni del §7.2.5 per edifici in classe di duttilità B). Risultano quindi le seguenti sollecitazioni di progetto:

$$\begin{aligned} N &= 1.1 \cdot R_z = 1.1 \cdot 23671.10 \text{ kg} = +26038.20 \text{ kg} \\ T &= \text{radq}[(1.1 \cdot R_x)^2 + (1.1 \cdot R_y)^2] = \\ &= \text{radq}(1.1 \cdot 1712.66)^2 + (1.1 \cdot 1732.08)^2 = 2679.42 \text{ kg} \\ M &= \text{radq}[(1.1 \cdot M_x)^2 + (1.1 \cdot M_y)^2] = \\ &= \text{radq}[(1.1 \cdot 2087.58)^2 + (1.1 \cdot 2772.18)^2] = 3817.32 \text{ kgm} \end{aligned}$$

## Verifiche di capacità portante per carichi verticali in condizioni drenate

L'attrito laterale limite  $\tau_s$  è calcolato, per la profondità  $z$ , in funzione della pressione verticale efficace  $\sigma'_{v0}(z)$ , secondo la relazione:  $\tau_s(z) = \beta \cdot \sigma'_{v0}(z)$ , in cui  $\beta = k \cdot \tan(\delta)$ , dove  $k$  rappresenta il coefficiente di spinta del terreno a lato del palo e  $\tan(\delta)$  è il coefficiente di attrito palo terreno. Per pali in terreni coesivi normalmente consolidati può considerarsi, cautelativamente,  $\beta = 0.25$ . Se il terreno presenta un valore della coesione drenata  $c'$  diverso da zero allora al termine di attrito calcolato come sopra si può aggiungere l'adesione  $a'$ , risulta:  $\tau_s(z) = \beta \cdot \sigma'_{v0}(z) + a'$ . Cautelativamente si può considerare  $a' = 0.5 \cdot c'$ .

Essendo omogenea la stratigrafia di progetto la pressione verticale efficace è crescente in modo lineare con la profondità ed, alla testa ( $z = 0$  m) ed al piede ( $z = 10$  m) del palo vale:

$$\sigma'_{v0}(0) = 0 \text{ kPa}$$

$$\sigma'_{v0}(L_p) = (\gamma_{\text{sat}} - \gamma_w) \cdot L_p = (21 - 10) \cdot 10 = 110 \text{ kPa}$$

L'attrito laterale limite risulta:

$$\tau_s(0) = \beta \cdot \sigma'_{v0}(0) + 0.5 \cdot c' = 0.25 \cdot 0 + 0.5 \cdot 5 = 2.5 \text{ kPa} = 0.025 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\tau_s(L_p) = \beta \cdot \sigma'_{v0}(L_p) + 0.5 \cdot c' = 0.25 \cdot 110 + 0.5 \cdot 5 = 30.0 \text{ kPa} = 0.300 \text{ Kg/cm}^2$$

Dall'integrale dell'attrito sulla superficie del fusto risulta la resistenza laterale di progetto per compressione:

$$Q_{S\text{lim}} = (\pi \cdot D_p) \cdot [\tau_s(0) + \tau_s(L_p)] \cdot L_p / 2 = (3.14 \cdot 0.5) \cdot [2.5 + 30.0] \cdot 10 / 2 = 255.2544 \text{ kN}$$

La pressione limite alla base  $q_p$  è calcolata con il metodo proposto da Vesic (1975), in condizioni drenate risulta:

$$q_p = c' \cdot N_c + p'(L_p) \cdot N_q$$

In cui la pressione media efficace  $p'$ , alla base del palo, vale:

$$p'(L_p) = [(1 + 2 \cdot k_0) / 3] \cdot \sigma'_{v0}(L_p) = [(1 + 2 \cdot 0.5) / 3] \cdot 110 = 73.33 \text{ kPa}$$

I coefficienti  $N_q$  ed  $N_c$  sono valutati, delle caratteristiche di resistenza e deformabilità del terreno alla base del palo, in funzione dell'indice di rigidezza  $I_r$  e dell'indice di rigidezza ridotto  $I_{rr}$ , e dei seguenti parametri:

$$a = 3 / [3 - \sin(\varphi)] = 3 / [3 - \sin(30^\circ)] = 3 / [3 - \sin(0.5236)] = 1.20$$

$$b = \exp[(\pi/2 - \varphi) \cdot \tan(\varphi)] = \exp[(3.14/2 - 0.5236) \cdot \tan(0.5236)] = 1.83$$

$$c = (4/3) \cdot \sin(\varphi) / [1 + \sin(\varphi)] = (4/3) \cdot \sin(0.5236) / [1 + \sin(0.5236)] = 0.44^-$$

$$k_p = [1 + \sin(\varphi)] / [1 - \sin(\varphi)] = [1 + \sin(0.5236)] / [1 - \sin(0.5236)] = 3.00$$

$$I_r = G / [c' + \sigma'_{v0}(L_p) \cdot \tan(\varphi)] = 8000 / [5 + 110 \cdot \tan(0.5236)] = 116.77$$

$$\mu = (1/2) \cdot (E/G) - 1 = (1/2) \cdot (20/8) - 1 = 0.25$$

$$\varepsilon_v = \{(1 - 2 \cdot \mu) / [2 \cdot (1 - \mu)]\} \cdot [\sigma'_{v0}(L_p) / G] =$$

$$= \{(1 - 2 \cdot 0.25) / [2 \cdot (1 - 0.25)]\} \cdot [110 / 8000] = 0.0045833$$

$$I_{rr} = I_r / (1 + \varepsilon_v \cdot I_r) = 116.77 / (1 + 0.0045833 \cdot 116.77) = 76.06$$

I coefficienti  $N_q$  ed  $N_c$  risultano:

$$N_q = a \cdot b \cdot k_p \cdot I_{rr}^c = 1.20 \cdot 1.83 \cdot 3.00 \cdot 76.06^{0.44^-} = 45.18$$

$$N_c = (N_q - 1) / \tan(\varphi) = (45.18 - 1) / \tan(0.5236) = 76.52$$

Da cui la pressione limite vale:

$$q_p = c' \cdot N_c + p'(L_p) \cdot N_q = 5.00 \cdot 76.52 + 73.33 \cdot 45.18 = 3695.65 \text{ kPa}$$

La resistenza di progetto alla base del palo vale:

$$Q_{P\text{lim}} = (\pi \cdot D_p^2 / 4) \cdot q_p = (3.14 \cdot 0.5^2 / 4) \cdot 3695.65 = 725.6392 \text{ kN}$$

Per pali trivellati, effettuando le verifiche secondo l'approccio 2, sia in condizioni sismiche che statiche, devono essere considerati i seguenti fattori di sicurezza parziali: per la resistenza laterale da compressione  $\gamma_{R,s} = 1.15$ ; per la resistenza alla base  $\gamma_{R,p} = 1.35$ . Considerando un'unica verticale indagata il fattore di correlazione è  $\xi = 1.70$ . Pertanto la resistenza di progetto vale:

$$R_d = (Q_{S\text{lim}} / \gamma_{R,s} + Q_{P\text{lim}} / \gamma_{R,p}) / \xi = (255.25 / 1.15 + 725.64 / 1.35) / 1.70 = 446.75 \text{ kN}$$

Considerando lo sforzo normale come effetto delle azioni di progetto:

$$E_d = N = 26038.20 \text{ kg} = 260.38 \text{ kN}$$

La sicurezza risulta:

$$s_{ic} = R_d/E_d = 446.75/260.38 = 1.72$$

## Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$Q_{S_{lim}}$	25525.44 kg	25525.40 kg
$Q_{P_{lim}}$	72563.92 kg	72568.60 kg
$S_{ic}$	1.72	1.72

### Verifiche di capacità portante per carichi verticali in condizioni non drenate

L'attrito laterale limite  $\tau_s$  è calcolato, in funzione della coesione non drenata  $c_u$  del terreno lungo il fusto del palo, secondo la relazione:  $\tau_s(z) = \alpha(z) \cdot c_u(z)$ , in cui  $\alpha(z)$  è un parametro variabile con la coesione non drenata. Per pali trivellati è valido utilizzare il metodo di Skempton (1986), secondo il quale  $\alpha(z) = \min\{0.45 ; 96/c_u(z) < \text{kPa}>\}$ . Essendo omogenea la stratigrafia di progetto  $c_u(z)$  ed  $\alpha(z)$  sono costanti, quindi risulta:

$$\alpha(z) = \min\{0.45 ; 96/c_u(z) < \text{kPa}>\} = \min\{0.45 ; 96/80\} = 0.45$$

L'attrito laterale limite, costante al variare di  $z$ , risulta:

$$\tau_s(z) = \tau_s = \alpha(z) \cdot c_u(z) = 0.45 \cdot 80 = 36.00 \text{ kPa} = 0.36 \text{ Kg/cm}^2$$

Dall'integrale dell'attrito sulla superficie del fusto risulta la resistenza laterale di progetto per compressione:

$$Q_{S_{lim}} = (\pi \cdot D_p) \cdot \tau_s \cdot L_p = (3.14 \cdot 0.5) \cdot 36.00 \cdot 10 = 565.4867 \text{ kN}$$

La pressione limite alla base  $q_p$  è calcolata con il metodo proposto da Vesic (1975), in condizioni non drenate risulta:

$$q_p = c_u \cdot N_c + \sigma_{v0}(L_p)$$

In cui la pressione verticale totale  $\sigma_{v0}$ , alla base del palo, vale:

$$\sigma_{v0}(L_p) = \gamma_{sat} \cdot L_p = 21 \cdot 10 = 210 \text{ kPa}$$

Il coefficiente  $N_c$  è valutato, delle caratteristiche di deformabilità del terreno alla base del palo. Dato il modulo elastico non drenato  $E_u = 3 \cdot G = 3 \cdot 8 = 24 \text{ MPa}$ , in condizioni non drenate l'indice di rigidezza risulta:

$$I_r = (E_u/3)/c_u = (24000/3)/80 = 100.00$$

Considerando il parametro  $\varepsilon_v$  valutato in precedenza, l'indice di rigidezza ridotto risulta:

$$I_{rr} = I_r / (1 + \varepsilon_v \cdot I_r) = 100.00 / (1 + 0.0045833 \cdot 100.00) = 68.57$$

Il coefficiente  $N_c$  risulta:

$$N_c = (4/3) \cdot [\ln(I_{rr}) + 1] + \pi/2 + 1 = (4/3) \cdot [\ln(68.57) + 1] + 3.14/2 + 1 = 9.54$$

Da cui la pressione limite vale:

$$q_p = c_u \cdot N_c + \sigma_{v0}(L_p) = 80.00 \cdot 9.54 + 210 = 973.20 \text{ kPa}$$

La resistenza di progetto alla base del palo vale:

$$Q_{P_{lim}} = (\pi \cdot D_p^2/4) \cdot q_p = (3.14 \cdot 0.5^2/4) \cdot 973.20 = 191.0874 \text{ kN}$$

Considerando gli stessi fattori di sicurezza parziali e fattore di correlazione della verifica in condizioni drenate, la resistenza di progetto vale:

$$R_d = (Q_{S_{lim}}/\gamma_{R,s} + Q_{P_{lim}}/\gamma_{R,p})/\xi = (565.48/1.15 + 191.08/1.35)/1.70 = 372.50 \text{ kN}$$

Considerando lo sforzo normale come effetto delle azioni di progetto:

$$E_d = N = 26038.20 \text{ kg} = 260.38 \text{ kN}$$

La sicurezza risulta:

$$s_{ic} = R_d/E_d = 372.50/260.38 = 1.43$$

### Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$Q_{S_{lim}}$	56548.67 kg	56548.00 kg
$Q_{P_{lim}}$	19108.74 kg	19110.80 kg
$S_{ic}$	1.43	1.43

### Calcolo delle costanti elastiche per carichi verticali ed orizzontali e dei cedimenti

Il cedimento del terreno sollecitato dall'attrito laterale col palo viene valutato integrando le deformazioni indotte dalle sollecitazioni taglianti nel volume di terreno assiale al palo. La risposta elastica  $k_s(z)$ , in funzione della profondità  $z$ , è quindi pari al rapporto fra la tensione tangenziale sulla superficie di contatto fra palo e terreno ed il cedimento da essa indotto e risulta pari a:

$$k_s(z) = [G(z)/R_p]/\ln(r_{max}/R_p)$$

In cui  $R_p = D_p/2 = 0.5/2 = 0.25$  m è il raggio del palo, e  $r_{max}$  è il raggio del cerchio che definisce il cilindro rappresentativo del volume di terreno che subisce deformazioni significative. Nel problema in oggetto si pone  $\ln(r_{max}/R_p) = 4$ . Essendo omogenea la stratigrafia di progetto  $G(z)$  è costante, quindi risulta, per  $z$  da 0 a  $L_p$ :

$$k_s = [G/R_p]/\ln(r_{max}/R_p) = [8/0.25]/4 = 8.00 \text{ MPa/m} = 0.80 \text{ kg/cm}^3$$

Il cedimento del terreno sollecitato per compressione alla base del palo è assimilato a quello calcolato per una piastra rigida circolare su un semispazio elastico sottoposta ad una pressione uniforme. La risposta elastica  $k_p$  è quindi pari al rapporto fra la pressione alla base del palo e il cedimento da essa indotto e risulta pari a:

$$k_p = [(4/n)/(1-\mu)] \cdot (G/R_p) = [(4/3.14)/(1-0.25)] \cdot (8/0.25) = 54.35 \text{ MPa/m} = 5.43 \text{ kg/cm}^3$$

La risposta elastica per carichi orizzontali  $k_h$  è calcolata in funzione del modulo elastico del terreno  $E$  e di un coefficiente che rappresenta gli effetti tridimensionali di distribuzione delle tensioni a lato del palo  $e_{t,h}$  (ipotesi:  $e_{t,h}=2$ ). Essendo omogenea la stratigrafia di progetto risulta un valore costante di  $k_h$  pari a:

$$k_s = e_{t,h} \cdot [E/D_p] = 2 \cdot [20/0.5] = 80.00 \text{ MPa/m} = 8.00 \text{ kg/cm}^3$$

### Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$k_s$	0.80 kg/cm <sup>3</sup>	0.80 kg/cm <sup>3</sup>
$k_p$	5.43 kg/cm <sup>3</sup>	5.43 kg/cm <sup>3</sup>
$K_h$	8.00 kg/cm <sup>3</sup>	8.00 kg/cm <sup>3</sup>

Il calcolo dei cedimenti viene effettuato valutando le rigidzze offerte per sollecitazioni da attrito laterale e da pressione alla base attraverso l'integrazione delle risposte elastiche precedentemente calcolate. L'integrale della risposta elastica per effetto dell'attrito laterale risulta pari a:

$$\int k_s = (n \cdot D_p) \cdot L_p \cdot k_s = (3.14 \cdot 0.5) \cdot 10 \cdot 8 = 125.66 \text{ MN/m}$$

L'integrale della risposta elastica per effetto della pressione alla base risulta pari a:

$$\int k_p = (\pi \cdot D_p^2 / 4) \cdot k_p = (3.14 \cdot 0.5^2 / 4) \cdot 54.35 = 10.67 \text{ MN/m}$$

La costante rappresentativa della risposta elastica del complesso palo terreno per carichi verticali  $k_z$  è stimata considerando la sola componente per attrito laterale ( $\int k_s \gg \int k_p$ ), risulta quindi:

$$k_z = \int k_s = 125.66 \text{ MN/m} = 125660.00 \text{ kg/cm}$$

Per il calcolo dei cedimenti consideriamo i carichi risultanti dalla CC37 (SLE R). L'azione di progetto è data dalla reazione vincolare all'incastro e vale:

$$N = R_z = +25495.20 \text{ kg}$$

Il cedimento calcolato risulta pertanto:

$$\text{Ced.} = N/k_z = 25495.20/125660.00 = 0.20 \text{ cm}$$

### Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
Ced. (cond. drenate)	0.20 cm	0.29 cm
Ced. (cond. non drenate)	0.20 cm	0.20 cm

Note: ModeSt calcola i cedimenti considerando (oltre alla rigidezza a compressione del palo, in questo caso comunque trascurabile) la plasticizzazione per attrito laterale e per pressione alla base, attraverso un'analisi alle differenze finite. In condizioni drenate, diversamente alle condizioni non drenate, l'attrito laterale raggiunge il limite plastico lungo una parte del fusto, generando quindi cedimenti maggiori.

# Verifica di un'asta in acciaio

**Caratteristiche dell'asta:** la sezione dell'asta è rappresentata da un profilato HEA200 di acciaio tipo S235; l'asse è orizzontale e la sezione è disposta con l'asse forte rispetto alla verticale; la lunghezza è  $L = 500$  cm e i vincoli sono cerniera - appoggio verticale (coeff.  $\beta_y = \beta_z = 1$ ). Nella struttura di riferimento TVDM08A1 sono state modellate 4 aste con carichi differenti.

**Carichi:** in funzione delle verifiche da effettuare sono stati applicati i seguenti carichi:

asta 1 - carico assiale di trazione di 100 t;

asta 2 - carico assiale di compressione di 50 t;

asta 3 - peso proprio  $q_p$  + carico verticale permanente strutturale di  $q_n = 0.1$  t/m + carico verticale variabile definito come "Variabili Categoria A" di  $q_a = 0.5$  t/m;

asta 4 - carichi asta 3 + carico assiale di compressione di 25 t + momento flettente rispetto all'asse debole di 1 tm + momento torcente di 0.1 tm.

**File:** [TestValidazione] – TVDM08A1

## Calcolo teorico:

L'acciaio tipo S235 ha i seguenti parametri di progetto:

$f_{yk} = 235$  N/mm<sup>2</sup> = 2.35 t/cm<sup>2</sup> Tensione di snervamento;

$f_{tk} = 360$  N/mm<sup>2</sup> = 3.60 t/cm<sup>2</sup> Tensione di rottura.

$E = 2100.00$  t/cm<sup>2</sup> Modulo elastico.

$G = 807.69$  t/cm<sup>2</sup> Modulo elastico tangenziale.

$\rho = 7.85$  t/m<sup>3</sup> Densità.

La sezione del profilato HEA200 ha i seguenti parametri statici:

Area = 52.98 cm<sup>2</sup> Area della sezione;

$A_{net} = 42.39$  cm<sup>2</sup> Area netta per compressione ( $A_{net} = 0.8 \cdot Area$ );

$A_{eff} = 42.39$  cm<sup>2</sup> Area effettiva per trazione ( $A_{eff} = 0.8 \cdot Area$ );

$J_y = 3671.80$  cm<sup>4</sup> Momento d'inerzia rispetto all'asse Y;

$J_z = 1335.33$  cm<sup>4</sup> Momento d'inerzia rispetto all'asse Z;

$I_y = 8.32$  cm Raggio giratorio d'inerzia rispetto all'asse Y;

$I_z = 5.02$  cm Raggio giratorio d'inerzia rispetto all'asse Z;

$W_{ymin} = 386.51$  cm<sup>3</sup> Modulo di resistenza minimo rispetto all'asse Y;

$W_{zmin} = 133.53$  cm<sup>3</sup> Modulo di resistenza minimo rispetto all'asse Z;

$W_{y,plas} = 427.91$  cm<sup>3</sup> Modulo di resistenza plastico intorno all'asse y;

$W_{z,plas} = 203.73$  cm<sup>3</sup> Modulo di resistenza plastico intorno all'asse z;

$A_{tag,y} = 44.94$  cm<sup>2</sup> Area resistente a taglio in direz y;

$A_{tag,z} = 15.38$  cm<sup>2</sup> Area resistente a taglio in direz y;

$J_\omega = 108000.00$  cm<sup>6</sup> Costante di ingobbamento;

$J_t = 17.90$  cm<sup>4</sup> Momento d'inerzia torsionale;

$b_a = 20$  cm larghezza delle ali;

$t_a = 1$  cm spessore delle ali;

$b_s = 17$  cm larghezza dell'anima;

$t_s = 0.6$  cm spessore dell'anima.

Il peso proprio a metro lineare della sezione vale:

$$q_p = \rho \cdot Area = 7.85 \cdot (52.98/10000) = 0.04159 \text{ t/m}$$

## Verifica a trazione (4.2.6)

### Calcolo teorico:

La verifica viene effettuata sull'asta 1 con i carichi risultanti dalla CC1 (SLU), il controllo da normativa prevede il calcolo del seguente tasso di sfruttamento:

$$Tsf. = N_{Ed}/N_{t,Rd} \leq 1$$

Dove la resistenza di calcolo a trazione è pari a:

$$N_{t,Rd} = \min\{N_{pl,Rd}; N_{u,Rd}\}$$

In cui:

$$N_{pl,Rd} = A \cdot f_{yk} / \gamma_{M0} = 52.98 \cdot 2.35 / 1.05 = 118.58 \text{ t}$$

$$N_{u,Rd} = 0.9 \cdot A_{net} \cdot f_{tk} / \gamma_{M2} = 0.9 \cdot 42.39 \cdot 3.60 / 1.25 = 109.87 \text{ t}$$

Quindi  $N_{t,Rd} = N_{u,Rd} = 109.87 \text{ t}$ , per  $N_{Ed} = 100 \text{ t}$ , risulta:

$$Tsf. = N_{Ed}/N_{t,Rd} = 100/109.87 = 0.91 < 1$$

### Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$N_{pl,Rd}$	118.58 t	118.58 t
$N_{u,Rd}$	109.87 t	109.87 t
$Tsf.$	0.91	0.91

### Verifica a compressione (4.2.10)

#### Calcolo teorico:

La verifica viene effettuata sull'asta 2 con i carichi risultanti dalla CC1 (SLU), il controllo da normativa prevede il calcolo del seguente tasso di sfruttamento:

$$Tsf. = N_{Ed}/N_{c,Rd} \leq 1$$

Dove la resistenza di calcolo a compressione, per sezioni in classe 1, è pari a:

$$N_{c,Rd} = A \cdot f_{yk} / \gamma_{M0} = 52.98 \cdot 2.35 / 1.05 = 118.58 \text{ t}$$

Quindi per  $N_{Ed} = 50 \text{ t}$ , risulta:

$$Tsf. = N_{Ed}/N_{c,Rd} = 50/118.58 = 0.42 < 1$$

### Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$N_{c,Rd}$	118.58 t	118.58 t
$Tsf.$	0.42	0.42

### Verifica di stabilità (4.2.4.1.3.1)

#### Calcolo teorico:

La verifica viene effettuata sull'asta 2 con i carichi risultanti dalla CC1 (SLU), il controllo da normativa prevede il calcolo del seguente tasso di sfruttamento:

$$Tsf. = N_{Ed}/N_{b,Rd} \leq 1$$

Dove la resistenza all'instabilità  $N_{b,Rd}$  è calcolata, in relazione alle verifiche di stabilità nel piano più debole, nel caso in oggetto intorno all'asse Z locale dell'asta. Per sezioni in classe 1, con fattore di imperfezione  $\alpha = 0.49$ , risulta:

$$\lambda_z = \beta_z \cdot L / I_z = 1.500 / 5.02 = 99.60$$

$$N_{cr,z} = E \cdot A \cdot (\pi / \lambda_z)^2 = 2100 \cdot 52.98 \cdot (3.14 / 99.60)^2 = 110.70 \text{ t}$$

$$\lambda_z^* = \text{radq}(A \cdot f_{yk} / N_{cr,z}) = \text{radq}(52.98 \cdot 2.35 / 110.70) = 1.06$$

$$\Phi_z = 0.5 \cdot [1 + \alpha \cdot (\lambda_z^* - 0.2) + \lambda_z^{*2}] = 0.5 \cdot [1 + 0.49 \cdot (1.06 - 0.2) + 1.06^2] = 1.27$$

$$\chi_z = \min\{1; 1 / [\Phi_z + \text{radq}(\Phi_z^2 - \lambda_z^{*2})]\} = \min\{1; 1 / [1.27 + \text{radq}(1.27^2 - 1.06^2)]\} = 0.51$$

$$N_{b,Rd} = \chi_z \cdot A \cdot f_{yk} / \gamma_{M1} = 0.51 \cdot 52.98 \cdot 2.35 / 1.05 = 60.47 \text{ t}$$



Quindi per  $N_{Ed} = 50 \text{ t}$ , risulta:

$$Tsf. = N_{Ed}/N_{b,Rd} = 50/60.47 = 0.17 < 1$$

#### Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$N_{b,Rd}$	60.47 t	59.96 t
Tsf.	0.83	0.83

#### Verifica a flessione (4.2.13)

##### Calcolo teorico:

La verifica viene effettuata sull'asta 3 con i carichi risultanti dalla CC1 (SLU), il controllo da normativa prevede il calcolo del seguente tasso di sfruttamento:

$$Tsf. = M_{Ed}/M_{c,Rd} \leq 1$$

Dove la resistenza di calcolo a flessione retta della sezione risulta:

$$M_{c,Rd} = W_{y,plac} \cdot f_{yk} / \gamma_{M0} = 427.91 \cdot 2.35 / 1.05 = 957.70 \text{ tcm}$$

Il momento flettente di progetto ed il relativo tasso di sfruttamento risultano:

$$M_{Ed} = (1.3 \cdot q_p + 1.5 \cdot p_n + 1.5 \cdot q_a) \cdot L^2 / 8 = (1.3 \cdot 0.04159 + 1.5 \cdot 0.1 + 1.5 \cdot 0.5) \cdot 5^2 / 8 = (0.954067) \cdot 5^2 / 8 = 2.9815 \text{ tm} = 298.15 \text{ tcm}$$

$$Tsf. = M_{Ed}/M_{c,Rd} = 298.15/957.70 = 0.31 < 1$$

#### Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$M_{Ed}$	298.15 tcm	298.15 tcm
$M_{c,Rd}$	957.70 tcm	957.70 tcm
Tsf.	0.31	0.31

#### Verifica a taglio (4.2.17)

##### Calcolo teorico:

La verifica viene effettuata sull'asta 3 con i carichi risultanti dalla CC1 (SLU), il controllo da normativa prevede il calcolo del seguente tasso di sfruttamento:

$$Tsf. = V_{Ed}/V_{c,Rd} \leq 1$$

Dove la resistenza di calcolo a taglio della sezione risulta:

$$V_{c,Rd} = [A_{tag,z} / \text{radq}(3)] \cdot f_{yk} / \gamma_{M0} = [15.38 / \text{radq}(3)] \cdot 2.35 / 1.05 = 19.88 \text{ t}$$

Il taglio di progetto ed il relativo tasso di sfruttamento risultano:

$$V_{Ed} = (1.3 \cdot q_p + 1.5 \cdot p_n + 1.5 \cdot q_a) \cdot L / 2 = (1.3 \cdot 0.04159 + 1.5 \cdot 0.1 + 1.5 \cdot 0.5) \cdot 5 / 2 = (0.954067) \cdot 5 / 2 = 2.39 \text{ t}$$

$$Tsf. = V_{Ed}/V_{c,Rd} = 2.39/19.88 = 0.12 < 1$$

#### Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$V_{Ed}$	2.39 t	2.39 t
$V_{c,Rd}$	19.88 t	19.88 t
Tsf.	0.12	0.12

## Calcolo frecce massime

### Calcolo teorico:

Il calcolo viene effettuato sull'asta 3 con i carichi risultanti dalla CC2 (SLE R), la freccia massima per carichi totali ed il rapporto della luce con la freccia valgono:

$$\begin{aligned}f_{z,tot} &= (5/384) \cdot (1.0 \cdot q_p + 1.0 \cdot p_n + 1.0 \cdot q_a) \cdot L^4 / (E \cdot J_y) = \\&= (5/384) \cdot (1.0 \cdot 0.04159 + 1.0 \cdot 0.1 + 1.0 \cdot 0.5) \cdot 5^4 / (2100 \cdot 10^4 \cdot 3671.80 \cdot 10^{-8}) = \\&= 6.77 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0.677 \text{ cm} \\L/f_{z,tot} &= 500/0.677 = 738\end{aligned}$$

Mentre la freccia massima per soli carichi accidentali ed il rapporto della luce con la freccia valgono:

$$\begin{aligned}f_{z,acc.} &= (5/384) \cdot (1.0 \cdot q_a) \cdot L^4 / (E \cdot J_y) = \\&= (5/384) \cdot (1.0 \cdot 0.5) \cdot 5^4 / (2100 \cdot 10^4 \cdot 3671.80 \cdot 10^{-8}) = \\&= 5.28 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0.528 \text{ cm} \\L/f_{z,acc} &= 500/0.528 = 948\end{aligned}$$

### Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$F_{z,tot}$	0.677 cm	0.68 cm
$L/F_{z,tot}$	738	740
$F_{z,acc}$	0.528 cm	0.53 cm
$L/F_{z,acc}$	948	950

## Verifica di stabilità aste inflesse (4.2.4.1.3.2)

### Calcolo teorico:

La verifica viene effettuata sull'asta 3 con i carichi risultanti dalla CC1 (SLU), il controllo da normativa prevede il calcolo del seguente tasso di sfruttamento:

$$Tsf. = M_{Ed}/M_{b,Rd} \leq 1$$

Dove la resistenza all'instabilità  $M_{b,Rd}$  è calcolata in funzione del momento critico elastico di instabilità torsionale  $M_{cr}$  (C4.2.30):

$$M_{cr} = \psi \cdot (\pi/L_{cr}) \cdot \text{radq}[(E \cdot J_y) \cdot (G \cdot J_t)] \cdot \text{radq}[1 + (\pi/L_{cr})^2 \cdot (E \cdot J_\omega)/(G \cdot J_t)]$$

In cui, per travi appoggiate agli estremi si pone:  $\psi = 1.75$  e  $L_{cr} = L = 500$  cm.  $M_{cr,z}$  Risulta:

$$\begin{aligned}M_{cr} &= 1.75 \cdot (3.14/500) \cdot \text{radq}[(2100 \cdot 3671.80) \cdot (807.69 \cdot 17.90)] \cdot \\&\quad \cdot \text{radq}[1 + (3.14/500)^2 \cdot (2100 \cdot 108000)/(807.69 \cdot 17.90)] = 4668.48 \text{ tcm.}\end{aligned}$$

Considerando  $\lambda_{LT,0} = 0.4$ ;  $\beta_{LT} = 0.75$ ;  $\alpha_{LT} = 0.34$ ;  $k_c = 0.94$ ;  $\beta = 0.75$ , la resistenza all'instabilità  $M_{b,Rd}$  è calcolata dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\lambda_{LT} &= \text{radq}(W_{y,plac} \cdot f_{yk}/M_{cr}) = \text{radq}(427.91 \cdot 2.35/4668.48) = 0.46 \\ \Phi_{LT} &= 0.5 \cdot [1 + \alpha_{LT} \cdot (\lambda_{LT} - \lambda_{LT,0}) + \beta \cdot \lambda_{LT}^2] = 0.5 \cdot [1 + 0.34 \cdot (0.46 - 0.4) + 0.75 \cdot 0.46^2] = 0.59 \\ f &= 1 - 0.5 \cdot (1 - k_c) \cdot [1 - 2.0 \cdot (\lambda_{LT} - 0.8)^2] = 1 - 0.5 \cdot (1 - 0.94) \cdot [1 - 2.0 \cdot (0.46 - 0.8)^2] = 0.98 \\ \chi_{LT} &= \min\{1; (1/f)/\lambda_{LT}^2; (1/f)/[\Phi_{LT} + \text{radq}(\Phi_{LT}^2 - \beta_{LT} \cdot \lambda_{LT}^2)]\} \\ &= \min\{1; (1/0.98)/0.46^2; (1/0.98)/[0.59 + \text{radq}(0.59^2 - 0.75 \cdot 0.46^2)]\} = \\ &= \min\{1.00; 4.82; 1.00\} = 1.00 \\ M_{b,Rd} &= \chi_{LT} \cdot W_{y,plac} \cdot f_{yk}/\gamma_{M1} = 1.00 \cdot 427.91 \cdot 2.35/1.05 = 957.70 \text{ tcm}\end{aligned}$$

Risultando il fattore di riduzione per l'instabilità flessione torsionale  $\chi_{LT} = 1.00$  la resistenza all'instabilità  $M_{b,Rd}$  risulta uguale la resistenza a flessione  $M_{c,Rd}$  calcolata in precedenza. Il momento flettente di progetto ed il relativo tasso di sfruttamento risultano:

$$M_{Ed} = (1.3 \cdot q_p + 1.5 \cdot p_n + 1.5 \cdot q_a) \cdot L^2 / 8 = (1.3 \cdot 0.04159 + 1.5 \cdot 0.1 + 1.5 \cdot 0.5) \cdot 5^2 / 8 = (0.954067) \cdot 5^2 / 8 = 2.9815 \text{ tm} = 298.15 \text{ tcm}$$

$$Tsf. = M_{Ed} / M_{c,Rd} = 298.15 / 957.70 = 0.31 < 1$$

### Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$M_{Ed}$	298.15 tcm	298.15 tcm
$M_{c,Rd}$	957.70 tcm	955.80 tcm
$Tsf.$	0.31	0.31

### Verifica a pressoflessione biassiale (4.2.39)

#### Calcolo teorico:

La verifica viene effettuata sull'asta 4 con i carichi risultanti dalla CC1 (SLU), il controllo da normativa prevede il calcolo del seguente tasso di sfruttamento:

$$Tsf. = \max\{Tsf_n.; Tsf_y.; Tsf_z.; Tsf_d.\} \leq 1$$

In cui, dalla verifica a compressione risulta:

$$N_{c,Rd} = A \cdot f_{yk} / \gamma_{M0} = 52.98 \cdot 2.35 / 1.05 = 118.58 \text{ t}$$

$$N_{ed} = 25 \text{ t}$$

$$Tsf_n. = N_{ed} / N_{c,Rd} = 25 / 118.58 = 0.21$$

$$n = Tsf_n = 0.21$$

$$a = \min\{0.5; (Area - 2 \cdot b_a \cdot t_a) / Area\} = \min\{0.5; (52.98 - 2 \cdot 20 \cdot 1) / 52.98\} = 0.24$$

Dalla verifica a pressoflessione retta rispetto all'asse y risulta:

$$M_{cy,Rd} = W_{y,pl} \cdot f_{yk} / \gamma_{M0} = 427.91 \cdot 2.35 / 1.05 = 957.70 \text{ tcm}$$

$$M_{Ny,Rd} = M_{cy,Rd} \cdot \min\{1; (1-n) / (1-0.5 \cdot a)\} = 957.70 \cdot \min\{1; (1-0.21) / (1-0.5 \cdot 0.24)\} = 957.70 \cdot 0.90 = 861.93 \text{ tcm}$$

$$M_{y,Ed} = (1.3 \cdot q_p + 1.5 \cdot p_n + 1.5 \cdot q_a) \cdot L^2 / 8 = (1.3 \cdot 0.04159 + 1.5 \cdot 0.1 + 1.5 \cdot 0.5) \cdot 5^2 / 8 = (0.954067) \cdot 5^2 / 8 = 2.9815 \text{ tm} = 298.15 \text{ tcm}$$

$$Tsf_y. = M_{y,Ed} / M_{Ny,Rd} = 298.15 / 861.93 = 0.35$$

La verifica a pressoflessione retta rispetto all'asse z, per  $n < a$ , risulta:

$$M_{cz,Rd} = W_{z,pl} \cdot f_{yk} / \gamma_{M0} = 203.73 \cdot 2.35 / 1.05 = 455.97 \text{ tcm}$$

$$M_{Nz,Rd} = M_{cz,Rd} = 455.97 \text{ tcm}$$

$$M_{z,Ed} = 1 \text{ tm} = 100 \text{ tcm}$$

$$Tsf_z. = M_{z,Ed} / M_{Nz,Rd} = 100 / 455.97 = 0.22$$

In fine, dalla verifica a pressoflessione biassiale risulta:

$$Tsf_d. = (Tsf_y.)^2 + (Tsf_z.)^{5 \cdot n} = (0.35)^2 + (0.22)^{5 \cdot 0.21} = 0.32$$

La verifica risulta pertanto:

$$Tsf. = \max\{Tsf_n.; Tsf_y.; Tsf_z.; Tsf_d.\} = \max\{0.21; 0.35; 0.22; 0.32\} = 0.35 \leq 1$$

### Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$Tsf_n.$	0.21	0.21

$Tsf_y.$	0.35	0.35
$Tsf_z.$	0.22	0.22
$Tsf_d.$	0.32	0.32
$Tsf.$	0.35	0.35

#### Verifica a taglio e torsione dir. Z (4.2.25)

##### **Calcolo teorico:**

La verifica viene effettuata sull'asta 4 con i carichi risultanti dalla CC1 (SLU), il controllo da normativa prevede il calcolo del seguente tasso di sfruttamento:

$$Tsf. = V_{ed}/V_{c,Rd,red} \leq 1$$

Dove la resistenza di calcolo a taglio della sezione, ridotta per effetto della torsione, risulta:

$$V_{c,Rd,red} = V_{c,Rd} \cdot \text{radq}[1 - \tau_{t,Ed} \cdot \text{radq}(3) \cdot \gamma_{M0} / (1.25 \cdot f_{yk})]$$

Dove la resistenza di calcolo a taglio della sezione vale:

$$V_{c,Rd} = [A_{tag,z} / \text{radq}(3)] \cdot f_{yk} / \gamma_{M0} = [15.38 / \text{radq}(3)] \cdot 2.35 / 1.05 = 19.88 \text{ t}$$

Essendo la sollecitazione agente pari a  $M_{x,Ed} = 0.1 \text{ tm} = 10 \text{ tcm}$ , la tensione tangenziale massima dovuta alla torsione (che risulta essere sulle ali) vale quindi:

$$\tau_{t,Ed} = M_{x,Ed} \cdot t_a / J_t = 10 \cdot 1 / 17.90 = 0.56 \text{ t/cm}^2$$

Risulta pertanto:

$$\begin{aligned} V_{c,Rd,red} &= V_{c,Rd} \cdot \text{radq}[1 - \tau_{t,Ed} \cdot \text{radq}(3) \cdot \gamma_{M0} / (1.25 \cdot f_{yk})] = \\ &= 19.88 \cdot \text{radq}[1 - 0.56 \cdot \text{radq}(3) \cdot 1.05 / (1.25 \cdot 2.35)] = 16.06 \text{ tcm} \end{aligned}$$

Il taglio di progetto ed il relativo tasso di sfruttamento risultano:

$$\begin{aligned} V_{Ed} &= (1.3 \cdot q_p + 1.5 \cdot p_n + 1.5 \cdot q_a) \cdot L / 2 = (1.3 \cdot 0.04159 + 1.5 \cdot 0.1 + 1.5 \cdot 0.5) \cdot 5 / 2 = \\ &= (0.954067) \cdot 5 / 2 = 2.39 \text{ t} \end{aligned}$$

$$Tsf. = V_{ed} / V_{c,Rd} = 2.39 / 16.06 = 0.15 < 1$$

##### **Risultati:**

	Valore teorico	ModeSt
$V_{Ed}$	2.39 t	2.39 t
$V_{c,Rd,red}$	16.06 t	16.08 t
$Tsf.$	0.15	0.15

#### Verifica di stabilità aste presso-inflesse (C4.2.4.1.3.3.2)

##### **Calcolo teorico:**

La verifica viene effettuata sull'asta 4 con i carichi risultanti dalla CC1 (SLU), il controllo da normativa prevede il calcolo dei seguenti tassi di sfruttamento:

$$Tsf_{yy.} = (N_{Ed} / N_{zb,Rd}) + k_{yy} \cdot (M_{y,Ed} / M_{yb,Rd}) + k_{yz} \cdot (M_{z,Ed} / M_{zb,Rd}) \leq 1$$

$$Tsf_{zz.} = (N_{Ed} / N_{yb,Rd}) + k_{zy} \cdot (M_{y,Ed} / M_{yb,Rd}) + k_{zz} \cdot (M_{z,Ed} / M_{zb,Rd}) \leq 1$$

Dove la resistenza all'instabilità  $N_{yb,Rd}$  è calcolata, in relazione alle verifiche di stabilità nel piano XY locale, cioè intorno all'asse Z locale dell'asta. Per sezioni in classe 1, con fattore di imperfezione  $\alpha = 0.49$ , risulta:

$$\lambda_z = \beta_z \cdot L / I_z = 1 \cdot 500 / 5.02 = 99.60$$

$$N_{cr,z} = E \cdot A \cdot (\pi / \lambda_z)^2 = 2100 \cdot 52.98 \cdot (3.14 / 99.60)^2 = 110.70 \text{ t}$$

$$\begin{aligned}\lambda_z^* &= \text{radq}(A \cdot f_{yk} / N_{cr,z}) = \text{radq}(52.98 \cdot 2.35 / 110.70) = 1.06 \\ \Phi_z &= 0.5 \cdot [1 + \alpha \cdot (\lambda_z^* - 0.2) + \lambda_z^{*2}] = 0.5 \cdot [1 + 0.49 \cdot (1.06 - 0.2) + 1.06^2] = 1.27 \\ \chi_z &= \min\{1; 1/[\Phi_z + \text{radq}(\Phi_z^2 - \lambda_z^{*2})]\} = \min\{1; 1/[1.27 + \text{radq}(1.27^2 - 1.06^2)]\} = 0.51 \\ N_{yb,Rd} &= \chi_z \cdot A \cdot f_{yk} / \gamma_{M1} = 0.51 \cdot 52.98 \cdot 2.35 / 1.05 = 60.47 \text{ t}\end{aligned}$$

Quindi per  $N_{Ed} = 25 \text{ t}$ , risulta:

$$N_{Ed} / N_{yb,Rd} = 25 / 60.47 = 0.42$$

Mentre la resistenza all'instabilità  $N_{zb,Rd}$  è calcolata, in relazione alle verifiche di stabilità nel piano XZ locale, cioè intorno all'asse Y locale dell'asta. Per sezioni in classe 1, con fattore di imperfezione  $\alpha = 0.34$ , risulta:

$$\begin{aligned}\lambda_y &= \beta_y \cdot L / I_y = 1 \cdot 500 / 8.32 = 60.09 \\ N_{cr,y} &= E \cdot A \cdot (\pi / \lambda_y)^2 = 2100 \cdot 52.98 \cdot (3.14 / 60.09)^2 = 303.80 \text{ t} \\ \lambda_y^* &= \text{radq}(A \cdot f_{yk} / N_{cr,y}) = \text{radq}(52.98 \cdot 2.35 / 303.80) = 0.64 \\ \Phi_y &= 0.5 \cdot [1 + \alpha \cdot (\lambda_y^* - 0.2) + \lambda_y^{*2}] = 0.5 \cdot [1 + 0.34 \cdot (0.64 - 0.2) + 0.64^2] = 0.78 \\ \chi_y &= \min\{1; 1/[\Phi_y + \text{radq}(\Phi_y^2 - \lambda_y^{*2})]\} = \min\{1; 1/[0.78 + \text{radq}(0.78^2 - 0.64^2)]\} = 0.82 \\ N_{zb,Rd} &= \chi_y \cdot A \cdot f_{yk} / \gamma_{M1} = 0.82 \cdot 52.98 \cdot 2.35 / 1.05 = 97.23 \text{ t}\end{aligned}$$

Quindi per  $N_{Ed} = 25 \text{ t}$ , risulta:

$$N_{Ed} / N_{zb,Rd} = 25 / 97.23 = 0.26$$

Le resistenza all'instabilità  $M_{yb,Rd}$  e  $M_{zb,Rd}$  sono calcolate in funzione del momento critico elastico di instabilità torsionale  $M_{cr}$  (C4.2.30):

$$M_{cr} = \psi \cdot (\pi / L_{cr}) \cdot \text{radq}[(E \cdot J_y) \cdot (G \cdot J_t)] \cdot \text{radq}[1 + (\pi / L_{cr})^2 \cdot (E \cdot J_\omega) / (G \cdot J_t)]$$

In cui, per travi appoggiate agli estremi si pone:  $\psi = 1.75$  e  $L_{cr} = L = 500 \text{ cm}$ .  $M_{cr,z}$  Risulta:

$$\begin{aligned}M_{cr} &= 1.75 \cdot (3.14 / 500) \cdot \text{radq}[(2100 \cdot 3671.80) \cdot (807.69 \cdot 17.90)] \cdot \\ &\quad \cdot \text{radq}[1 + (3.14 / 500)^2 \cdot (2100 \cdot 108000) / (807.69 \cdot 17.90)] = 4668.48 \text{ tcm}.\end{aligned}$$

Considerando  $\lambda_{LT,0} = 0.4$ ;  $\beta_{LT} = 0.75$ ;  $\alpha_{LT} = 0.34$ ;  $k_c = 0.94$ , la resistenza all'instabilità  $M_{yb,Rd}$  è calcolata dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\lambda_{LT} &= \text{radq}(W_{y,plasm} \cdot f_{yk} / M_{cr}) = \text{radq}(427.91 \cdot 2.35 / 4668.48) = 0.46 \\ \Phi_{LT} &= 0.5 \cdot [1 + \alpha_{LT} \cdot (\lambda_{LT} - \lambda_{LT,0}) + \beta \cdot \lambda_{LT}^2] = 0.5 \cdot [1 + 0.34 \cdot (0.46 - 0.4) + 0.75 \cdot 0.46^2] = 0.59 \\ f &= 1 - 0.5 \cdot (1 - k_c) \cdot [1 - 2.0 \cdot (\lambda_{LT} - 0.8)^2] = 1 - 0.5 \cdot (1 - 0.94) \cdot [1 - 2.0 \cdot (0.46 - 0.8)^2] = 0.98 \\ \chi_{LT} &= \min\{1; (1/f) / \lambda_{LT}^2; (1/f) / [\Phi_{LT} + \text{radq}(\Phi_{LT}^2 - \beta_{LT} \cdot \lambda_{LT}^2)]\} \\ &= \min\{1; (1/0.98) / 0.46^2; (1/0.98) / [0.59 + \text{radq}(0.59^2 - 0.75 \cdot 0.46^2)]\} = \\ &= \min\{1.00; 4.82; 1.00\} = 1.00 \\ M_{yb,Rd} &= \chi_{LT} \cdot W_{y,plasm} \cdot f_{yk} / \gamma_{M1} = 1.00 \cdot 427.91 \cdot 2.35 / 1.05 = 957.70 \text{ tcm}\end{aligned}$$

Il momento flettente di progetto risulta:

$$\begin{aligned}M_{yEd} &= (1.3 \cdot q_p + 1.5 \cdot p_n + 1.5 \cdot q_a) \cdot L^2 / 8 = (1.3 \cdot 0.04159 + 1.5 \cdot 0.1 + 1.5 \cdot 0.5) \cdot 5^2 / 8 = \\ &= (0.954067) \cdot 5^2 / 8 = 2.9815 \text{ tm} = 298.15 \text{ tcm}\end{aligned}$$

Quindi:

$$M_{yEd} / M_{yb,Rd} = 298.15 / 957.70 = 0.31$$

Analogamente, la resistenza all'instabilità  $M_{zb,Rd}$  è calcolata dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\lambda_{LT} &= \text{radq}(W_{z,plasm} \cdot f_{yk} / M_{cr}) = \text{radq}(203.73 \cdot 2.35 / 4668.48) = 0.32 \\ \Phi_{LT} &= 0.5 \cdot [1 + \alpha_{LT} \cdot (\lambda_{LT} - \lambda_{LT,0}) + \beta \cdot \lambda_{LT}^2] = 0.5 \cdot [1 + 0.34 \cdot (0.32 - 0.4) + 0.75 \cdot 0.32^2] = 0.52 \\ f &= 1 - 0.5 \cdot (1 - k_c) \cdot [1 - 2.0 \cdot (\lambda_{LT} - 0.8)^2] = 1 - 0.5 \cdot (1 - 0.94) \cdot [1 - 2.0 \cdot (0.32 - 0.8)^2] = 0.98 \\ \chi_{LT} &= \min\{1; (1/f) / \lambda_{LT}^2; (1/f) / [\Phi_{LT} + \text{radq}(\Phi_{LT}^2 - \beta_{LT} \cdot \lambda_{LT}^2)]\} \\ &= \min\{1; (1/0.98) / 0.32^2; (1/0.98) / [0.52 + \text{radq}(0.52^2 - 0.75 \cdot 0.32^2)]\} = \\ &= \min\{1.00; 9.96; 1.06\} = 1.00 \\ M_{zb,Rd} &= \chi_{LT} \cdot W_{z,plasm} \cdot f_{yk} / \gamma_{M1} = 1.00 \cdot 203.73 \cdot 2.35 / 1.05 = 455.97 \text{ tcm}\end{aligned}$$

Quindi per  $M_{zEd} = 100$  tcm, risulta:

$$M_{zEd}/M_{zb,Rd} = 100/455.97 = 0.22$$

Per le sollecitazioni agenti i coefficienti correttivi del momento flettente per la verifica di stabilità a presso-flessione deviata valgono:  $\alpha_{my} = 0.95$  ;  $\alpha_{mz} = 0.95$ . Per sezioni in classe 1 ed elementi con modesta deformabilità torsionale i coefficienti di interazione per la verifica di stabilità a pressoflessione valgono:

$$K_{yy} = \alpha_{my} \cdot (1 + \alpha_y \cdot b_y)$$

$$\alpha_y = \min\{0.80 ; \lambda_y^* - 0.2\} = \min\{0.80 ; 0.64 - 0.2\} = 0.44$$

$$b_y = N_{Ed}/N_{zb,Rd} = 25/97.23 = 0.26$$

$$K_{yy} = \alpha_{my} \cdot (1 + \alpha_y \cdot b_y) = 0.95 \cdot (1 + 0.44 \cdot 0.26) = 1.06$$

$$K_{zy} = 0.6 \cdot K_{yy} = 0.6 \cdot 1.06 = 0.63$$

$$K_{zz} = \alpha_{mz} \cdot (1 + \alpha_z \cdot b_z)$$

$$\alpha_z = \min\{1.40 ; 2 \cdot \lambda_z^* - 0.6\} = \min\{1.40 ; 2 \cdot 1.06 - 0.6\} = 1.40$$

$$b_z = N_{Ed}/N_{yb,Rd} = 25/60.47 = 0.42$$

$$K_{zz} = \alpha_{mz} \cdot (1 + \alpha_z \cdot b_z) = 0.95 \cdot (1 + 1.4 \cdot 0.42) = 1.50$$

$$K_{yz} = 0.6 \cdot K_{zz} = 0.6 \cdot 1.06 = 0.90$$

I tassi di sfruttamento risultano:

$$\begin{aligned} Ts f_{yy} &= (N_{Ed}/N_{zb,Rd}) + k_{yy} \cdot (M_{y,Ed}/M_{yb,Rd}) + k_{yz} \cdot (M_{z,Ed}/M_{zb,Rd}) = \\ &= 0.26 + 1.06 \cdot 0.31 + 0.90 \cdot 0.22 = 0.26 + 0.33 + 0.20 = 0.79 \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ts f_{zz} &= (N_{Ed}/N_{yb,Rd}) + k_{zy} \cdot (M_{y,Ed}/M_{yb,Rd}) + k_{zz} \cdot (M_{z,Ed}/M_{zb,Rd}) = \\ &= 0.42 + 0.63 \cdot 0.31 + 1.50 \cdot 0.22 = 0.42 + 0.20 + 0.33 = 0.95 \leq 1 \end{aligned}$$

### Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$Ts f_{yy}$	0.79	0.79
$Ts f_{zz}$	0.95	0.95

# Verifica di un'asta in legno

**Caratteristiche dell'asta:** l'asta è rappresentata da una sezione rettangolare in legno lamellare; l'asse è orizzontale e la sezione è disposta con l'asse forte rispetto alla verticale; la lunghezza è  $L = 400$  cm e i vincoli sono cerniera - appoggio verticale (coeff.  $\beta_y = \beta_z = 1$ ). Nel modello di riferimento TVLEG sono state modellate 5 aste con carichi differenti in modo tale da ottenere stati di sollecitazione differenti.

## Carichi

In funzione delle verifiche da effettuare sono stati applicati i seguenti carichi:

- asta 1: - carico assiale di trazione di  $P_1=200$  KN (20000 kg) definito come "Permanente strutturale" e avente *classe di durata* "Permanente";
- asta 2: - carico assiale di compressione di  $P_2=250$  KN (25000 kg) definito come "Permanente strutturale" e avente *classe di durata* "Permanente";
- asta 3: - carico verticale lineare uniforme  $q_{1z} = 6$  KN/m (600 kg/m) definito come "Permanente strutturale" e avente *classe di durata* "Permanente";  
- carico verticale lineare uniforme  $q_{2z} = 4$  KN/m (400 kg/m) definito come "Variabili Categoria A" e avente *classe di durata* "Media";  
- carico orizzontale lineare uniforme  $q_{3y} = 4$  KN/m (400 kg/m) definito come "Permanente strutturale" e avente *classe di durata* "Permanente";
- asta 4: - carico assiale di trazione di  $P_4=100$  KN (10000 kg) definito come "Permanente non strutturale" e avente *classe di durata* "Permanente";  
- carico verticale lineare uniforme  $q_4 = 5$  KN/m (500 kg/m) definito come "Permanente non strutturale" e avente *classe di durata* "Permanente";
- asta 5: - carico assiale di compressione di  $P_5=150$  KN (15000 kg) definito come "Permanente non strutturale" e avente *classe di durata* "Permanente";  
- carico verticale lineare uniforme  $q_5 = 6$  KN/m (600 kg/m) definito come "Permanente non strutturale" e avente *classe di durata* "Permanente";

**File:** [TestValidazione] – TVLEG

## Calcolo teorico:

Le 5 aste modellate hanno "*classe di servizio 1*", secondo la classificazione della tabella 4.4.II delle NTC 2008 (paragrafo 4.4.5).

Il legno, di tipo GL24K/BS11-lamellare combinato, ha le seguenti caratteristiche di progetto:

$E = 116000$ kg/cm <sup>2</sup>	Modulo elastico assiale medio parallelo alle fibre;
$E_{0,05} = 94000$ kg/cm <sup>2</sup>	Modulo elastico frattile assiale 5% parallelo alle fibre;
$G = 5900$ kg/cm <sup>2</sup>	Modulo elastico tangenziale;
$f_{m,k} = 240$ kg/cm <sup>2</sup>	Resistenza caratteristica a flessione;
$f_{c,0,k} = 210$ kg/cm <sup>2</sup>	Resistenza caratteristica a compressione parallela alle fibre;
$f_{t,0,k} = 140$ kg/cm <sup>2</sup>	Resistenza caratteristica a trazione parallela alle fibre;
$f_{v,k} = 22$ kg/cm <sup>2</sup>	Resistenza caratteristica a taglio.

La sezione delle 5 aste è rettangolare con base **b=20 cm** e altezza **h=30 cm** e presenta i seguenti parametri statici:

Area = 600 cm <sup>2</sup>	Area della sezione;
$J_Y = 45000$ cm <sup>4</sup>	Momento d'inerzia rispetto all'asse Y;
$J_Z = 20000$ cm <sup>4</sup>	Momento d'inerzia rispetto all'asse Z;
$I_Y = 8.66$ cm	Raggio giratorio d'inerzia rispetto all'asse Y;
$I_Z = 5.77$ cm	Raggio giratorio d'inerzia rispetto all'asse Z;
$W_Y = 3000$ cm <sup>3</sup>	Modulo di resistenza rispetto all'asse Y;

$$W_z = 2000 \text{ cm}^3$$

$$A_{\text{tag},Y} = 500 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{tag},Z} = 500 \text{ cm}^2$$

Modulo di resistenza rispetto all'asse Z;  
Area resistente a taglio in direz y;  
Area resistente a taglio in direz y;

#### Verifica a trazione (4.4.8.1.1)

##### **Calcolo teorico:**

La verifica viene effettuata sull'asta 1 con i carichi risultanti dalla CC1 (SLU); il controllo da Normativa prevede il soddisfacimento della seguente disuguaglianza:

$$\sigma_{t,0,d} \leq f_{t,0,d}$$

Dove la resistenza di calcolo a trazione è pari a:

$$f_{t,0,d} = K_{\text{mod}} * f_{t,0,k} * K_h / \gamma_M = (0.6 * 140 * 1.07) / 1.45 = 61.99 \text{ kg/cm}^2$$

In cui:

$$f_{t,0,k} = 140 \text{ kg/cm}^2$$

$$K_{\text{mod}} = 0.6$$

$$K_h = \min[(600/h)^{0.1}; 1.1] = 1.07 \text{ (par. 11.7.1.1 NTC 2008)}$$

$$\gamma_M = 1.45$$

Quindi per  $N_{Ed} = P_1 * \gamma_{g1} = 20000 * 1.3 = 26000 \text{ Kg}$ , risulta:

$$\sigma_{t,0,d} = N_{Ed} / A = 26000 / 600 = 43.33 \text{ kg/cm}^2 \leq f_{t,0,d} = 61.99 \text{ kg/cm}^2$$

Il tasso di sfruttamento risulta di:

$$\text{Sfr.} = \sigma_{t,0,d} / f_{t,0,d} = 43.33 / 61.99 = 0.70 < 1$$

##### **Risultati:**

	Valore teorico	ModeSt
$\sigma_{t,0,d}$	43.33 kg/cm <sup>2</sup>	43.33 kg/cm <sup>2</sup>
$f_{t,0,d}$	61.99 kg/cm <sup>2</sup>	62.09 kg/cm <sup>2</sup>
Sfr.	0.70	0.70

#### Verifica a compressione (4.4.8.1.3)

##### **Calcolo teorico:**

La verifica viene effettuata sull'asta 2 con i carichi risultanti dalla CC2 (SLU); il controllo da Normativa prevede il soddisfacimento della seguente disuguaglianza:

$$\sigma_{c,0,d} \leq f_{c,0,d}$$

Dove la resistenza di calcolo a compressione è pari a:

$$f_{c,0,d} = K_{\text{mod}} * f_{c,0,k} / \gamma_M = (0.6 * 210) / 1.45 = 86.90 \text{ kg/cm}^2$$

In cui:

$$f_{c,0,k} = 210 \text{ kg/cm}^2$$

$$K_{\text{mod}} = 0.6$$

$$\gamma_M = 1.45$$

Quindi per  $N_{Ed} = P_2 * \gamma_{g1} = -25000 * 1.3 = -32500 \text{ kg}$ , risulta:

$$\sigma_{c,0,d} = N_{Ed} / A = -32500 / 600 = -54.17 \text{ kg/cm}^2 \leq f_{c,0,d} = 86.90 \text{ kg/cm}^2$$



Il tasso di sfruttamento risulta di:

$$\text{Sfr.} = \sigma_{c,0,d} / f_{c,0,d} = 54.17/86.90 = 0.62 < 1$$

**Risultati:**

	Valore teorico	ModeSt
$\sigma_{c,0,d}$	-54.17 kg/cm <sup>2</sup>	-54.17 kg/cm <sup>2</sup>
$f_{c,0,d}$	86.90 kg/cm <sup>2</sup>	86.90 kg/cm <sup>2</sup>
Sfr.	0.62	0.62

#### Verifica di stabilità elementi compressi (4.4.8.2.2)

**Calcolo teorico:**

La verifica viene effettuata sull'asta 2 con i carichi risultanti dalla CC2 (SLU); il controllo da Normativa prevede il calcolo del seguente tasso di sfruttamento:

$$\text{Sfr.} = \sigma_{c,0,d} / (K_{crit,c} * f_{c,0,d}) \leq 1$$

La verifica di instabilità viene effettuata nel piano più debole (snellezza max), nel caso in oggetto intorno all'asse Z locale dell'asta (ovvero l'asta si instabilizza nel piano x-y). Per cui si ha:

$$\lambda_z = \beta_y \cdot L / I_z = 1 \cdot 400 / 5.77 = 69.32$$

$$K_{crit,c,z} = 1 / [k + \text{radq}(k^2 - \lambda_{rel,c,z}^2)] = 1 / [1.08 + \text{radq}(1.08^2 - 1.04^2)] = 0.73$$

In cui:

$$k = 0.5 * [1 + \beta_c * (\lambda_{rel,c,z} - 0.3) + \lambda_{rel,c,z}^2] = 0.5 * [1 + 0.1 * (1.04 - 0.3) + 1.04^2] = 1.08$$

$$\lambda_{rel,c,z} = (\lambda_z / \Pi) * \text{radq}(f_{c,0,k} / E_{0.005}) = (69.32 / 3.14) * \text{radq}(210 / 94000) = 1.04$$

$$\beta_c = 0.1 \text{ per legno lamellare}$$

$$f_{c,0,k} = 210 \text{ kg/cm}^2$$

Quindi per  $N_{Ed} = P_2 * \gamma_{g1} = -25000 * 1.3 = -32500 \text{ kg}$ , risulta:

$$\sigma_{c,0,d} = N_{Ed} / A = -32500 / 600 = -54.17 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Sfr.} = \sigma_{c,0,d} / (K_{crit,c} * f_{c,0,d}) = 54.17 / (0.734 * 86.90) = 0.85 < 1$$

**Risultati:**

	Valore teorico	ModeSt
$\sigma_{c,0,d}$	-54.17 kg/cm <sup>2</sup>	-54.17 kg/cm <sup>2</sup>
$f_{c,0,d}$	86.90 kg/cm <sup>2</sup>	86.90 kg/cm <sup>2</sup>
$K_{crit,c,z}$	0.73	0.73
Sfr.	0.85	0.85

#### Verifica a flessione (4.4.8.1.6)

**Calcolo teorico:**

La verifica viene effettuata sull'asta 3 con i carichi risultanti dalle CC3 (SLU); il controllo da Normativa prevede il calcolo dei seguenti tassi di sfruttamento:

$$\text{Sfr.}_1 = (\sigma_{m,y,d} / f_{m,y,d}) + K_m * (\sigma_{m,z,d} / f_{m,z,d}) \leq 1$$

$$\text{Sfr.}_2 = K_m * (\sigma_{m,y,d} / f_{m,y,d}) + (\sigma_{m,z,d} / f_{m,z,d}) \leq 1$$

Dove le resistenze di calcolo a flessione retta attorno alle due direzioni y e z locali della sezione sono:

$$f_{m,y,d} = K_{mod} * f_{m,k} * K_{h,y} / \gamma_M = 141.68 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{m,z,d} = K_{mod} * f_{m,k} * K_{h,z} / \gamma_M = 145.65 \text{ kg/cm}^2$$

In cui:

$$f_{m,k} = 240 \text{ kg/cm}^2$$

$$K_{mod} = 0.8 \text{ relativo al carico di minor durata (Variabili Cat. A con durata media)}$$

$$K_{h,y} = \min[(600/h)^{0.1}; 1.1] = 1.07 \text{ (par. 11.7.1.1 NTC 2008)}$$

$$K_{h,z} = \min[(600/b)^{0.1}; 1.1] = 1.10 \text{ (par. 11.7.1.1 NTC 2008)}$$

$$\gamma_M = 1.45$$

Mentre il coeff.  $K_m$ , secondo NTC 2008 risulta essere:

$$K_m = 0.7 \text{ per sezioni trasversali rettangolari.}$$

I momenti flettenti di progetto ed i relativi stati tensionali risultano:

$$M_{y,Ed} = (\gamma_{G1} * q_{1z} + \gamma_{Q1} * q_{2z}) * L^2 / 8 = (1.3 * 600 + 1.5 * 400) * 4^2 / 8 = 2760.00 \text{ Kgm}$$

$$M_{z,Ed} = (\gamma_{G1} * q_{3y}) * L^2 / 8 = (1.3 * 400) * 4^2 / 8 = 1040.00 \text{ Kgm}$$

$$\sigma_{m,y,d} = M_{y,Ed} / W_y = 276000 / 3000 = 92.00 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{m,z,d} = M_{z,Ed} / W_z = 104000 / 2000 = 52.00 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{m,d} = \sigma_{m,y,d} + \sigma_{m,z,d} = 92.00 + 52.00 = 144.00 \text{ kg/cm}^2$$

Quindi i tassi di sfruttamento nelle due direzioni risultano:

$$\begin{aligned} \text{Sfr}_{.1} &= (\sigma_{m,y,d} / f_{m,y,d}) + K_m * (\sigma_{m,z,d} / f_{m,z,d}) = \\ &= (92.00 / 141.68) + 0.7 * (52.00 / 145.65) = 0.90 < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sfr}_{.2} &= K_m * (\sigma_{m,y,d} / f_{m,y,d}) + (\sigma_{m,z,d} / f_{m,z,d}) = \\ &= 0.7 * (92.00 / 141.68) + (52.00 / 145.65) = 0.81 < 1 \end{aligned}$$

## Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$\sigma_{m,d}$	144.00 kg/cm <sup>2</sup>	144.00 kg/cm <sup>2</sup>
$f_{m,y,d}$	141.68 kg/cm <sup>2</sup>	141.92 kg/cm <sup>2</sup>
$f_{m,z,d}$	145.65 kg/cm <sup>2</sup>	145.66 kg/cm <sup>2</sup>
$\text{Sfr}_{.max}$	0.90	0.90

## Verifica a taglio (4.4.8.1.9)

### Calcolo teorico:

La verifica viene effettuata sull'asta 3 con i carichi risultanti dalla CC3 (SLU); il controllo da Normativa prevede il calcolo della seguente disuguaglianza:

$$\tau_d \leq f_{v,d}$$

Dove la resistenza di calcolo a taglio della sezione risulta:

$$f_{v,d} = f_{v,k} * K_{mod} / \gamma_M = 12.14 \text{ t}$$

In cui:

$$f_{v,k} = 22 \text{ kg/cm}^2$$

$K_{mod} = 0.8$  relativo al carico di minor durata (Variabili Cat. A con durata media)

$$\gamma_M = 1.45$$

I tagli di progetto ed i relativi stati tensionali risultano:

$$V_{z,Ed} = (\gamma_{G1} * q_{1z} + \gamma_{Q1} * q_{2z}) * L/2 = (1.3 * 600 + 1.5 * 400) * 4/2 = 2760.00 \text{ Kgm}$$

$$V_{y,Ed} = (\gamma_{G1} * q_{3y}) * L/2 = (1.3 * 400) * 4/2 = 1040.00 \text{ Kgm}$$

$$\tau_{dz} = (V_{z,Ed} * 1.5) / (h * b) = (2760.00 * 1.5) / (30 * 20) = 6.90 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{dy} = (V_{y,Ed} * 1.5) / (h * b) = (1040.00 * 1.5) / (20 * 30) = 2.60 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_d = \text{radq}(\tau_{dz}^2 + \tau_{dy}^2) = 7.37 \text{ kg/cm}^2$$

Quindi la verifica ed il tasso di sfruttamento risultano:

$$\tau_d \leq f_{v,d} = 7.37 \text{ kg/cm}^2 < 12.14 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Sfr.} = \tau_d / f_{v,d} = 7.37 / 12.14 = 0.61 < 1$$

### Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$\tau_d$	7.37 t	7.37 t
$f_{v,d}$	12.14 t	12.14 t
Sfr.	0.61	0.61

### Verifica di stabilità elementi inflessi (4.4.8.2.1)

#### Calcolo teorico:

La verifica viene effettuata sull'asta 3 con i carichi risultanti dalla CC3 (SLU); il controllo da Normativa prevede il calcolo del seguente tasso di sfruttamento nelle due direzioni y e z locali della sezione:

$$\text{Sfr.}_1 = [\sigma_{m,eqy,d} / (K_{crit,y,m} * f_{m,y,d})] + K_m * [\sigma_{m,eqz,d} / (K_{crit,z,m} * f_{m,z,d})] \leq 1$$

$$\text{Sfr.}_2 = K_m * [\sigma_{m,eqy,d} / (K_{crit,y,m} * f_{m,y,d})] + [\sigma_{m,eqz,d} / (K_{crit,z,m} * f_{m,z,d})] \leq 1$$

Le resistenze di calcolo a flessione retta attorno alle due direzioni y e z locali della sezione vengono calcolate come nella precedente verifica a flessione e sono:

$$f_{m,y,d} = K_{mod} * f_{m,k} * K_{h,y} / \gamma_M = 141.68 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{m,z,d} = K_{mod} * f_{m,k} * K_{h,z} / \gamma_M = 145.65 \text{ kg/cm}^2$$

$K_m = 0.7$  per sezioni trasversali rettangolari.

Le tensioni di calcolo  $\sigma_{m,y,d}$  e  $\sigma_{m,z,d}$  vengono calcolate utilizzando, come sollecitazioni agenti, i momenti equivalenti  $M_{eq,y}$  e  $M_{eq,z}$  come riportato in letteratura (Giordano) in modo del tutto analogo a quanto indicato nella UNI 10011 relativa all'acciaio:

$$M_{eq} = 1.3 * M_m \quad \text{momento equivalente che deve soddisfare la seguente limitazione} \\ 0.75 * M_{max} \leq M_{eq} \leq M_{max}$$

Nelle due direzioni locali della sezione si ha:

$$M_{y,max} = (\gamma_{G1} * q_{1z} + \gamma_{Q1} * q_{2z}) * L^2 / 8 = (1.3 * 600 + 1.5 * 400) * 4^2 / 8 = 2760.00 \text{ Kgm}$$

$$M_m = M_{y,max} / 3 = 2760.00 / 3 = 920.00 \text{ kgm} \quad \text{momento medio}$$

$$M_{eq} = 1.3 * M_m = 1.3 * 920.00 = 1196.00 \text{ kgm} < 0.75 * M_{max} = 2070.00 \text{ kgm}$$

$$M_{zmax} = (\gamma_{G1} * q_{3y}) * L^2 / 8 = (1.3 * 400) * 4^2 / 8 = 1040.00 \text{ Kgm}$$

$$M_m = M_{zmax} / 3 = 1040.00 / 3 = 346.67 \text{ kgm} \quad \text{momento medio}$$

$$M_{eq} = 1.3 M_m = 1.3 * 346.67 = 450.67 \text{ kgm} < 0.75 * M_{max} = 780.00 \text{ kgm}$$

Quindi per il calcolo delle sollecitazioni si assumono i seguenti momenti flettenti:

$$M_{eqy} = 2070.00 \text{ kgm}$$

$$M_{eqz} = 780.00 \text{ kgm}$$

Gli stati tensionali risultano:

$$\sigma_{m,eqy,d} = M_{eqy} / W_y = 207000 / 3000 = 69.00 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{m,eqz,d} = M_{eqz} / W_z = 78000 / 2000 = 39.00 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{m,d} = \sigma_{m,eqy,d} + \sigma_{m,eqz,d} = 69.00 + 39.00 = 108.00 \text{ kg/cm}^2$$

I coefficienti  $K_{crit,m}$  vengono calcolati secondo le espressioni riportate nel paragrafo 4.4.8.2.1 NTC 2008, in funzione della snellezza relativa  $\lambda_{rel,m}$  che assume i seguenti valori:

$$\lambda_{rel,y,m} = \text{radq}(f_{m,k} / \sigma_{m,y,cri}) = \text{radq}(240 / 2218.91) = 0.33$$

$$\lambda_{rel,z,m} = \text{radq}(f_{m,k} / \sigma_{m,z,cri}) = \text{radq}(240 / 7488.84) = 0.18$$

In cui:

$$f_{m,k} = 240 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{m,y,cri} = [(\Pi^2 * b^2 * E_{0.05}) / (L * h)] * \text{radq}(G/E) =$$

$$= [(3.14 * 20^2 * 94000) / (400 * 30)] * \text{radq}(5900 / 116000) = 2218.91 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{m,z,cri} = [(\Pi^2 * h^2 * E_{0.05}) / (L * b)] * \text{radq}(G/E) =$$

$$= [(3.14 * 30^2 * 94000) / (400 * 20)] * \text{radq}(5900 / 116000) = 7488.84 \text{ kg/cm}^2$$

In entrambe le direzioni  $\lambda_{rel,m}$  assume dei valori minori di 0.75, quindi i coefficienti  $K_{crit,y,m}$  e  $K_{crit,z,m}$  assumono entrambi il valore 1 e si ottengono i seguenti tassi di sfruttamento per la verifica:

$$Sfr_{.1} = [\sigma_{m,eqy,d} / (K_{crit,y,m} * f_{m,y,d})] + K_m * [\sigma_{m,eqz,d} / (K_{crit,z,m} * f_{m,z,d})] =$$

$$= [69.00 / (1 * 141.68)] + 0.7 * [39.00 / (1 * 145.65)] = 0.67 < 1$$

$$Sfr_{.2} = K_m * [\sigma_{m,eqy,d} / (K_{crit,y,m} * f_{m,y,d})] + [\sigma_{m,eqz,d} / (K_{crit,z,m} * f_{m,z,d})] =$$

$$= 0.7 * [69.00 / (1 * 141.68)] + [39.00 / (1 * 145.65)] = 0.61 < 1$$

**Risultati:**

	Valore teorico	ModeSt
$\sigma_{m,d}$	108.00 t	108.00 t
$K_{crit,y,m}$	1.00	1.00
$K_{crit,z,m}$	1.00	1.00
$f_{m,y,d}$	141.68	141.92
$f_{m,z,d}$	145.65	145.66
$Sfr_{.max}$	0.67	0.67

#### Calcolo frecce massime (4.4.7)

##### **Calcolo teorico:**

Il calcolo viene effettuato sull'asta 3 con i carichi risultanti dalla CC4 (SLE R). La freccia massima (a lungo termine) per carichi totali ed il relativo rapporto della luce con la freccia, vengono calcolati incrementando direttamente gli spostamenti con il coefficiente  $K_{def}$  ricavato dalla tabella 4.4.V delle NTC 2008 per legno lamellare incollato con classe di servizio 1. Si ottengono i seguenti risultati:

$$\begin{aligned}f_{z,tot} &= [(5/384)*(q_{1z}+q_{2z})*L^4/(E \cdot J_y)]*(1+K_{def}) = \\&= [(5/384)*(6+4)*400^4/(116000*45000)]*(1+0.6) = 1.02 \text{ cm} \\L/f_{z,tot} &= 400/1.02 = 393\end{aligned}$$

##### **Risultati:**

	Valore teorico	ModeSt
$f_{z,tot}$	1.02 cm	0.98 cm
$L/f_{z,tot}$	393	407

#### Verifica a tensoflessione (4.4.8.1.7)

##### **Calcolo teorico:**

La verifica viene effettuata sull'asta 4 con i carichi risultanti dalle CC7 (SLU); il controllo da Normativa prevede il calcolo dei seguenti tassi di sfruttamento nelle due direzioni y e z locali della sezione:

$$\begin{aligned}\text{Sfr}_{.1} &= (\sigma_{t,0,d}/f_{t,0,d}) + (\sigma_{m,y,d}/f_{m,y,d}) + K_m * (\sigma_{m,z,d}/f_{m,z,d}) \leq 1 \\ \text{Sfr}_{.2} &= (\sigma_{t,0,d}/f_{t,0,d}) + K_m * (\sigma_{m,y,d}/f_{m,y,d}) + (\sigma_{m,z,d}/f_{m,z,d}) \leq 1\end{aligned}$$

Dove le resistenze di calcolo della sezione sono:

$$\begin{aligned}f_{t,0,d} &= K_{mod} * f_{t,0,k} * K_h / \gamma_M = (0.6 * 140 * 1.07) / 1.45 = 61.99 \text{ kg/cm}^2 \\ f_{m,y,d} &= K_{mod} * f_{m,k} * K_{h,y} / \gamma_M = (0.6 * 240 * 1.07) / 1.45 = 106.26 \text{ kg/cm}^2 \\ f_{m,z,d} &= K_{mod} * f_{m,k} * K_{h,z} / \gamma_M = (0.6 * 240 * 1.10) / 1.45 = 109.24 \text{ kg/cm}^2\end{aligned}$$

In cui:

$$\begin{aligned}f_{m,k} &= 240 \text{ kg/cm}^2 \\ K_{mod} &= 0.6 \text{ relativo al carico di minor durata (permanenti non strutturali)} \\ K_h &= \min[(600/h)^{0.1}; 1.1] = 1.07 \quad (\text{par. 11.7.1.1 NTC 2008}) \\ K_{h,y} &= \min[(600/h)^{0.1}; 1.1] = 1.07 \quad (\text{par. 11.7.1.1 NTC 2008}) \\ K_{h,z} &= \min[(600/b)^{0.1}; 1.1] = 1.10 \quad (\text{par. 11.7.1.1 NTC 2008}) \\ \gamma_M &= 1.45\end{aligned}$$

Mentre il coeff.  $K_m$ , secondo NTC 2008 risulta essere:

$$K_m = 0.7 \text{ per sezioni trasversali rettangolari.}$$

Le sollecitazioni di progetto ed i relativi stati tensionali risultano:

$$\begin{aligned}N_{ed} &= P_4 * \gamma_{G2} = 10000 * 1.5 = 15000.00 \text{ kg} \\ M_{y,Ed} &= (\gamma_{G2} * q_4) * L^2 / 8 = (1.5 * 500) * 4^2 / 8 = 1500.00 \text{ Kgm} \\ M_{z,Ed} &= 0 \quad (\text{in y non ci sono carichi})\end{aligned}$$

$$\sigma_{t,0,d} = N_{ed}/A = 15000.00/600 = 25.00 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{m,y,d} = M_{y,Ed}/W_y = 150000/3000 = 50.00 \text{ kg/cm}^2$$

Quindi i tassi di sfruttamento nelle due direzioni risultano:

$$\begin{aligned} \text{Sfr}_{.1} &= (\sigma_{t,0,d}/f_{t,0,d}) + (\sigma_{m,y,d}/f_{m,y,d}) = \\ &= (25.00/61.99) + (50.00/106.26) = 0.87 < 1 \\ \text{Sfr}_{.2} &= (\sigma_{t,0,d}/f_{t,0,d}) + K_m \cdot (\sigma_{m,y,d}/f_{m,y,d}) = \\ &= (25.00/61.99) + 0.7 \cdot (50.00/106.26) = 0.73 < 1 \end{aligned}$$

### Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$\sigma_{m,y,d}$	50.00 kg/cm <sup>2</sup>	50.00 kg/cm <sup>2</sup>
$f_{m,y,d}$	106.26 kg/cm <sup>2</sup>	106.44 kg/cm <sup>2</sup>
$\text{Sfr}_{.max}$	0.87	0.87

### Verifica di stabilità elementi tensoinflessi (4.4.8.1.7, 4.4.8.2.1)

#### Calcolo teorico:

La verifica viene effettuata sull'asta 4 con i carichi risultanti dalla CC7 (SLU); il controllo da Normativa prevede il calcolo dei seguenti tassi di sfruttamento nelle due direzioni y e z locali della sezione:

$$\begin{aligned} \text{Sfr}_{.1} &= (\sigma_{t,0,d}/f_{t,0,d}) + [\sigma_{m,eqy,d}/(K_{crit,y,m} \cdot f_{m,y,d})] + K_m \cdot [\sigma_{m,eqz,d}/(K_{crit,z,m} \cdot f_{m,z,d})] \leq 1 \\ \text{Sfr}_{.2} &= (\sigma_{t,0,d}/f_{t,0,d}) + K_m \cdot [\sigma_{m,eqy,d}/(K_{crit,y,m} \cdot f_{m,y,d})] + [\sigma_{m,eqz,d}/(K_{crit,z,m} \cdot f_{m,z,d})] \leq 1 \end{aligned}$$

Dove le resistenze di calcolo della sezione vengono calcolate come nella precedente verifica a tensoflessione e sono:

$$\begin{aligned} f_{t,0,d} &= K_{mod} \cdot f_{t,0,k} \cdot K_h / \gamma_M = (0.6 \cdot 140 \cdot 1.07) / 1.45 = 61.99 \text{ kg/cm}^2 \\ f_{m,y,d} &= K_{mod} \cdot f_{m,k} \cdot K_{h,y} / \gamma_M = (0.6 \cdot 240 \cdot 1.07) / 1.45 = 106.26 \text{ kg/cm}^2 \\ f_{m,z,d} &= K_{mod} \cdot f_{m,k} \cdot K_{h,z} / \gamma_M = (0.6 \cdot 240 \cdot 1.10) / 1.45 = 109.24 \text{ kg/cm}^2 \\ K_m &= 0.7 \text{ per sezioni trasversali rettangolari.} \end{aligned}$$

Le tensioni di calcolo flessionali  $\sigma_{m,y,d}$  e  $\sigma_{m,z,d}$  vengono calcolate utilizzando, come sollecitazioni agenti, i momenti equivalenti  $M_{eq,y}$  e  $M_{eq,z}$  come riportato in letteratura (Giordano) in modo del tutto analogo a quanto indicato nella UNI 10011 relativa all'acciaio:

$$M_{eq} = 1.3 \cdot M_m \quad \text{momento equivalente che deve soddisfare la seguente limitazione } 0.75 \cdot M_{max} \leq M_{eq} \leq M_{max}.$$

Nelle due direzioni locali della sezione si ha:

$$\begin{aligned} M_{y,max} &= (\gamma_{G1} \cdot q_4) \cdot L^2 / 8 = (1.5 \cdot 500) \cdot 4^2 / 8 = 1500.00 \text{ Kgm} \\ M_m &= M_{y,max} / 3 = 1500.00 / 3 = 500.00 \text{ kgm} \quad \text{momento medio} \\ M_{eq} &= 1.3 \cdot M_m = 1.3 \cdot 500.00 = 650.00 \text{ kgm} < 0.75 \cdot M_{max} = 1125.00 \text{ kgm} \\ M_{z,max} &= 0 \quad (\text{in y non ci sono carichi}) \end{aligned}$$

Quindi per il calcolo degli stati tensionali si assumono le seguenti sollecitazioni, ottenendo:

$$N_{ed} = P_4 * \gamma_{G2} = 10000 * 1.5 = 15000.00 \text{ kg}$$

$$M_{eqy} = 1125.00 \text{ kgm}$$

Gli stati tensionali risultano:

$$\sigma_{t,0,d} = N_{ed}/A = 15000.00/600 = 25.00 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{m,eqy,d} = M_{eqy}/W_y = 112500.00/3000 = 37.50 \text{ kg/cm}^2$$

Il coefficiente  $K_{crit,m}$  viene calcolato secondo le espressioni riportate nel paragrafo 4.4.8.2.1 NTC 2008, in funzione della snellezza relativa  $\lambda_{rel,m}$  che assume il seguente valore:

$$\lambda_{rel,y,m} = \text{radq}(f_{m,k}/\sigma_{m,y,cri}) = \text{radq}(240/2218.91) = 0.33$$

In cui:

$$f_{m,k} = 240 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{m,y,cri} = [(\Pi^2 * b^2 * E_{0.05}) / (L^2 * h)] * \text{radq}(G/E) =$$

$$= [(3.14^2 * 20^2 * 94000) / (400^2 * 30)] * \text{radq}(5900/116000) = 2218.91 \text{ kg/cm}^2$$

$\lambda_{rel,m}$  assume dei valori minori di 0.75, quindi il coefficiente  $K_{crit,y,m}$  assume il valore 1 e si ottiene i seguenti tasso di sfruttamento per la verifica:

$$Sfr_{.1} = (\sigma_{t,0,d} / f_{t,0,d}) + [\sigma_{m,eqy,d} / (K_{crit,y,m} * f_{m,y,d})] =$$

$$= (25.00/61.99) + [37.50 / (1 * 106.26)] = 0.76 < 1$$

$$Sfr_{.2} = (\sigma_{t,0,d} / f_{t,0,d}) + K_m * [\sigma_{m,eqy,d} / (K_{crit,y,m} * f_{m,y,d})] =$$

$$= (25.00/61.99) + 0.7 * [37.50 / (1 * 106.26)] = 0.65 < 1$$

## Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$\sigma_{m,y,d}$	37.50 t	37.50 t
$K_{crit,y,m}$	1.00	1.00
$f_{m,y,d}$	106.26	106.44
$Sfr_{.max}$	0.76	0.75

## Verifica a pressoflessione (4.4.8.1.8)

### Calcolo teorico:

La verifica viene effettuata sull'asta 5 con i carichi risultanti dalle CC8 (SLU); il controllo da Normativa prevede il calcolo dei seguenti tassi di sfruttamento nelle due direzioni y e z locali della sezione:

$$Sfr_{.1} = (\sigma_{c,0,d} / f_{c,0,d})^2 + (\sigma_{m,y,d} / f_{m,y,d}) + K_m * (\sigma_{m,z,d} / f_{m,z,d}) \leq 1$$

$$Sfr_{.2} = (\sigma_{c,0,d} / f_{c,0,d})^2 + K_m * (\sigma_{m,y,d} / f_{m,y,d}) + (\sigma_{m,z,d} / f_{m,z,d}) \leq 1$$

Dove le resistenze di calcolo della sezione sono:

$$f_{c,0,d} = K_{mod} * f_{c,0,k} / \gamma_M = (0.6 * 210) / 1.45 = 86.90 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{m,y,d} = K_{mod} * f_{m,k} * K_{h,y} / \gamma_M = (0.6 * 240 * 1.07) / 1.45 = 106.26 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{m,z,d} = K_{mod} * f_{m,k} * K_{h,z} / \gamma_M = (0.6 * 240 * 1.10) / 1.45 = 109.24 \text{ kg/cm}^2$$

In cui:

$$f_{m,k} = 240 \text{ kg/cm}^2$$

$K_{mod} = 0.6$  relativo al carico di minor durata (permanenti non strutturali)

$$K_{h,y} = \min[(600/h)^{0.1}; 1.1] = 1.07 \quad (\text{par. 11.7.1.1 NTC 2008})$$

$$K_{h,z} = \min[(600/b)^{0.1}; 1.1] = 1.10 \quad (\text{par. 11.7.1.1 NTC 2008})$$

$$\gamma_M = 1.45$$

Mentre il coeff.  $K_m$ , secondo NTC 2008 risulta essere:

$K_m = 0.7$  per sezioni trasversali rettangolari.

Le sollecitazioni di progetto ed i relativi stati tensionali risultano:

$$N_{ed} = P_5 * \gamma_{G2} = -15000 * 1.5 = -22500.00 \text{ kg}$$

$$M_{y,Ed} = (\gamma_{G2} * q_5) * L^2 / 8 = (1.5 * 600) * 4^2 / 8 = 1800.00 \text{ Kgm}$$

$$M_{z,Ed} = 0 \quad (\text{in y non ci sono carichi})$$

$$\sigma_{c,0,d} = N_{ed} / A = -22500 / 600 = -37.50 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{m,y,d} = M_{y,Ed} / W_y = 180000 / 3000 = 60.00 \text{ kg/cm}^2$$

Quindi i tassi di sfruttamento nelle due direzioni risultano:

$$\begin{aligned} Sfr_{.1} &= (\sigma_{c,0,d} / f_{c,0,d})^2 + (\sigma_{m,y,d} / f_{m,y,d}) = \\ &= (37.50 / 86.90)^2 + (60.00 / 106.26) = 0.75 < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Sfr_{.2} &= (\sigma_{c,0,d} / f_{c,0,d})^2 + K_m * (\sigma_{m,y,d} / f_{m,y,d}) = \\ &= (37.50 / 86.90)^2 + 0.7 * (60.00 / 106.26) = 0.58 < 1 \end{aligned}$$

## Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$\sigma_{c,0,d}$	-37.50 kg/cm <sup>2</sup>	-37.50 kg/cm <sup>2</sup>
$\sigma_{m,y,d}$	60.00 kg/cm <sup>2</sup>	60.00 kg/cm <sup>2</sup>
$f_{m,y,d}$	106.26 kg/cm <sup>2</sup>	106.44 kg/cm <sup>2</sup>
Sfr.max	0.75	0.75

## Verifica di stabilità elementi pressoinflessi (4.4.8.1.8, 4.4.8.2.2)

### Calcolo teorico:

La verifica viene effettuata sull'asta 5 con i carichi risultanti dalla CC8 (SLU); il controllo da Normativa prevede il calcolo dei seguenti tassi di sfruttamento nelle due direzioni y e z locali della sezione:

$$Sfr_{.1} = \sigma_{c,0,d} / (K_{crit,c} * f_{c,0,d}) + (\sigma_{m,eqy,d} / f_{m,y,d}) + K_m * (\sigma_{m,eqz,d} / f_{m,z,d}) \leq 1$$

$$Sfr_{.2} = \sigma_{c,0,d} / (K_{crit,c} * f_{c,0,d}) + K_m * (\sigma_{m,eqy,d} / f_{m,y,d}) + (\sigma_{m,eqz,d} / f_{m,z,d}) \leq 1$$

Dove le resistenze di calcolo della sezione vengono calcolate come nella precedente verifica a tensoflessione e sono:



$$f_{c,0,d} = K_{mod} \cdot f_{c,0,k} / \gamma_M = (0.6 \cdot 210) / 1.45 = 86.90 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{m,y,d} = K_{mod} \cdot f_{m,k} \cdot K_{h,y} / \gamma_M = (0.6 \cdot 240 \cdot 1.07) / 1.45 = 106.26 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{m,z,d} = K_{mod} \cdot f_{m,k} \cdot K_{h,z} / \gamma_M = (0.6 \cdot 240 \cdot 1.10) / 1.45 = 109.24 \text{ kg/cm}^2$$

In cui:

$$f_{m,k} = 240 \text{ kg/cm}^2$$

$$K_{mod} = 0.6 \text{ relativo al carico di minor durata (permanenti non strutturali)}$$

$$K_{h,y} = \min[(600/h)^{0.1}; 1.1] = 1.07 \quad (\text{par. 11.7.1.1 NTC 2008})$$

$$K_{h,z} = \min[(600/b)^{0.1}; 1.1] = 1.10 \quad (\text{par. 11.7.1.1 NTC 2008})$$

$$\gamma_M = 1.45$$

Mentre il coeff.  $K_m$ , secondo NTC 2008 risulta essere:

$$K_m = 0.7 \text{ per sezioni trasversali rettangolari.}$$

Le tensioni di calcolo flessionali  $\sigma_{m,y,d}$  e  $\sigma_{m,z,d}$  vengono calcolate utilizzando, come sollecitazioni agenti, i momenti equivalenti  $M_{eq,y}$  e  $M_{eq,z}$  come riportato in letteratura (Giordano) in modo del tutto analogo a quanto indicato nella UNI 10011 relativa all'acciaio:

$$M_{eq} = 1.3 \cdot M_m \quad \text{momento equivalente che deve soddisfare la seguente limitazione } 0.75 \cdot M_{max} \leq M_{eq} \leq M_{max}.$$

Nelle due direzioni locali della sezione si ha:

$$M_{y,max} = (\gamma_{G2} \cdot q_5) \cdot L^2 / 8 = (1.5 \cdot 600) \cdot 4^2 / 8 = 1800.00 \text{ Kgm}$$

$$M_m = M_{y,max} / 3 = 1800.00 / 3 = 600.00 \text{ kgm} \quad \text{momento medio}$$

$$M_{eq} = 1.3 \cdot M_m = 1.3 \cdot 600.00 = 780.00 \text{ kgm} < 0.75 \cdot M_{max} = 1350.00 \text{ kgm}$$

$$M_{z,max} = 0 \quad (\text{in y non ci sono carichi})$$

Quindi per il calcolo degli stati tensionali si assumono le seguenti sollecitazioni, ottenendo:

$$N_{ed} = P_5 \cdot \gamma_{G2} = -15000 \cdot 1.5 = -22500.00 \text{ kg}$$

$$M_{eqy} = 1350.00 \text{ kgm}$$

Gli stati tensionali risultano:

$$\sigma_{c,0,d} = N_{ed} / A = -22500.00 / 600 = -37.50 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{m,eqy,d} = M_{eqy} / W_y = 135000.00 / 3000 = 45.00 \text{ kg/cm}^2$$

Il coefficiente  $K_{crit,c}$  viene calcolato secondo le espressioni riportate nel paragrafo 4.4.8.2.2 NTC 2008, in funzione della snellezza relativa ai due assi locali y e z della sezione trasversale dell'asta.

Per la stabilità attorno a Z:

$$\lambda_z = \beta_y \cdot L / I_z = 1 \cdot 400 / 5.77 = 69.32$$

$$K_{crit,c,z} = 1 / [k + \text{radq}(k^2 - \lambda_{rel,c,z}^2)] = 1 / [1.08 + \text{radq}(1.08^2 - 1.04^2)] = 0.73$$

In cui:

$$k = 0.5 \cdot [1 + \beta_c \cdot (\lambda_{rel,c,z} - 0.3) + \lambda_{rel,c,z}^2] = 0.5 \cdot [1 + 0.1 \cdot (1.04 - 0.3) + 1.04^2] = 1.08$$

$$\lambda_{rel,c,z} = (\lambda_z / \Pi) \cdot \text{radq}(f_{c,0,k} / E_{0.005}) = (69.32 / 3.14) \cdot \text{radq}(210 / 94000) = 1.04$$

$$\beta_c = 0.1 \quad \text{per legno lamellare}$$

$$f_{c,0,k} = 210 \text{ kg/cm}^2$$

Per la stabilità attorno a Y:

$$\lambda_y = \beta_z \cdot L / I_y = 1 \cdot 400 / 8.66 = 46.18$$

$$K_{crit,c,y} = 1/[k + \text{radq}(k^2 - \lambda_{rel,c,y}^2)] = 1/[0.76 + \text{radq}(0.76^2 - 0.69^2)] = 0.93$$

In cui:

$$k = 0.5 * [1 + \beta_c * (\lambda_{rel,c,y} - 0.3) + \lambda_{rel,c,y}^2] = 0.5 * [1 + 0.1 * (0.69 - 0.3) + 0.69^2] = 0.76$$

$$\lambda_{rel,c,y} = (\lambda_y / \Pi) * \text{radq}(f_{c,0,k} / E_{0.005}) = (46.18 / 3.14) * \text{radq}(210 / 94000) = 0.69$$

$$\beta_c = 0.1 \quad \text{per legno lamellare}$$

$$f_{c,0,k} = 210 \text{ kg/cm}^2$$

I tassi di sfruttamento risultano:

$$\begin{aligned} Sfr_{.1} &= \sigma_{c,0,d} / (K_{crit,c,y} * f_{c,0,d}) + (\sigma_{m,eqy,d} / f_{m,y,d}) = \\ &= 37.50 / (0.93 * 86.90) + (45.00 / 106.26) = 0.89 < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Sfr_{.2} &= \sigma_{c,0,d} / (K_{crit,c,z} * f_{c,0,d}) + K_m * (\sigma_{m,eqy,d} / f_{m,y,d}) = \\ &= 37.50 / (0.73 * 86.90) + 0.7 * (45.00 / 106.26) = 0.89 \end{aligned}$$

## Risultati:

	Valore teorico	ModeSt
$\sigma_{c,0,d}$	-37.50 kg/cm <sup>2</sup>	-37.50 kg/cm <sup>2</sup>
$\sigma_{m,y,d}$	45.00 kg/cm <sup>2</sup>	45.00 kg/cm <sup>2</sup>
$K_{crit,c,y}$	0.93	0.93
$K_{crit,c,z}$	0.73	0.73
$Sfr_{.max}$	0.89	0.89

**ALLEGATO 02**

**MANUALE DI VALIDAZIONE DEL SOFTWARE**

**XFINEST 2012**

# **XFINEST**

**SOLUTORE AD ELEMENTI FINITI  
ANALISI STATICA, DINAMICA, NON LINEARE, INSTABILITÀ E DI PUSHOVER**

**Febbraio 2010**

## **MANUALE DI VALIDAZIONE**



Centro di Analisi Strutturale  
viale Giustiniano 10  
20129 Milano  
Italia

## **AVVERTENZE E CONDIZIONI D'USO**

In caso di informazioni tecniche inconsistenti od errori tipografici, questi saranno corretti nelle successive edizioni del manuale.

## SOMMARIO

TIPO DI ANALISI	TIPO DI ELEMENTI FINITI	NOME ESEMPIO
Elastica lineare	BEAM	TRAVE INCASTRATA SU ELEMENTI QF46 TRAVE CONTINUA CON SVINCOLI ELASTICI DEFINIZIONE VINCOLI OBLIQUI TRAVE SU SUOLO ELASTICO ALLA WINKLER PATCH TEST
	ISOSHELL, QF46	VOLTA CILINDRICA (PROBLEMA DI SCORDELIS-LO) PIASTRA CIRCOLARE APPOGGIATA CON CARICHI DISTRIBUITI MENSOLA A SEZIONE VARIABILE MENSOLA AD ASSE CIRCOLARE MENSOLA CON CARICHI DISTRIBUITI PATCH TEST MEMBRANA ELLITTICA SEMISFERA MENSOLA CON SEZIONE A Z PIASTRA DEFORMATA
	ISOSHELL ortotropo	PIASTRA ORTOTROPA SOTTO UN CARICO TRASVERSALE UNIFORME PIASTRA ORTOTROPA – PATCH TEST COMPORTAMENTO MEMBRANALE FLESSIONE PURA DI UNA PIASTRA ORTOTROPA – PATCH TEST ELEMENTI QF46 DISTORTI
	ISO2	TUBO SPESSO DI LUNGHEZZA INFINITA PATCH TEST
	ISO3	SFERA SOGGETTA A PRESSIONE UNIFORME SULLA SUPERFICIE PATCH TEST
Analisi Modale	ISOSHELL, QF46	PIASTRA INCASTRATA SU UN LATO : ANALISI MODALE
Buckling lineare e non lineare		ASTA DI EULERO INSTABILITÀ DI UN ARCO CIRCOLARE INSTABILITÀ LATERALE DI UNA TRAVE A MENSOLA INSTABILITÀ DI UN PORTALE INCERNIERATO ALLA BASE CONFRONTO TRA LA FORMULAZIONE SECANTE E CLASSICA INSTABILITÀ TORSIONALE DI UNA COLONNA
Non lineare geometrica	TRUSS	ANALISI IN GRANDI SPOSTAMENTI DI UN ARCO RIBASSATO (MODELLO TRUSS 2D)
	BEAM	ANALISI IN GRANDI SPOSTAMENTI D'UNA MENSOLA INFLESSA ANALISI IN GRANDI SPOSTAMENTI D'UNA MENSOLA SOGGETTA A DUE FORZE CONCENTRATE ANALISI IN GRANDI SPOSTAMENTI D'UNA MENSOLA SOGGETTA A UN MOMENTO IN PUNTA ANALISI IN GRANDI SPOSTAMENTI D'UNA TRAVE CURVA SOGGETTA A UNA FORZA IN PUNTA ANALISI IN GRANDI SPOSTAMENTI D'UNA TRAVE DOTATA DI UN OFFSET (MODELLO 2D) ANALISI IN GRANDI SPOSTAMENTI DI UN TELAIO CON ELEMENTI CON SVINCOLI INTERNI
Non lineare statica	CJOINT	LEGAME A TRILATERA PER CJOINT
Analisi in frequenza	BEAM	TRAVE APPOGGIATA

	ISOSHELL, QF46	PIASTRA APPOGGIATA
--	-------------------	--------------------

<b>INTRODUZIONE.....</b>	<b>6</b>
<b>PATCH TEST.....</b>	<b>7</b>
<b>TUBO SPESSO DI LUNGHEZZA INFINITA.....</b>	<b>18</b>
<b>SFERA SOGGETTA A PRESSIONE UNIFORME SULLA SUPERFICIE.....</b>	<b>20</b>
<b>VOLTA CILINDRICA (PROBLEMA DI SCORDELIS-LO).....</b>	<b>22</b>
<b>PIASTRA CIRCOLARE APPOGGIATA CON CARICHI DISTRIBUITI.....</b>	<b>25</b>
<b>MENSOLA A SEZIONE VARIABILE.....</b>	<b>28</b>
<b>MENSOLA AD ASSE CIRCOLARE.....</b>	<b>31</b>
<b>MENSOLA CON CARICHI DISTRIBUITI.....</b>	<b>34</b>
<b>PIASTRA INCASTRATA SU UN LATO : ANALISI MODALE.....</b>	<b>37</b>
<b>TRAVE APPOGGIATA.....</b>	<b>40</b>
<b>PIASTRA APPOGGIATA.....</b>	<b>43</b>
<b>TRAVE SU SUOLO ELASTICO ALLA WINKLER.....</b>	<b>46</b>
<b>TRAVE INCASTRATA SU ELEMENTI QF46.....</b>	<b>48</b>
<b>TRAVE CONTINUA CON SVINCOLI ELASTICI.....</b>	<b>51</b>
<b>ANALISI IN GRANDI SPOSTAMENTI D'UNA MENSOLA INFLESSA.....</b>	<b>54</b>
<b>ANALISI IN GRANDI SPOSTAMENTI D'UNA MENSOLA</b>	
<b>SOGGETTA A DUE FORZE CONCENTRATE (MODELLO 2D).....</b>	<b>55</b>
<b>ANALISI IN GRANDI SPOSTAMENTI D'UNA MENSOLA SOGGETTA</b>	
<b>A UN MOMENTO IN PUNTA (MODELLO 2D).....</b>	<b>57</b>
<b>ANALISI IN GRANDI SPOSTAMENTI D'UNA TRAVE CURVA SOGGETTA</b>	
<b>A UNA FORZA IN PUNTA (MODELLO 3D).....</b>	<b>59</b>
<b>ANALISI IN GRANDI SPOSTAMENTI D'UNA TRAVE DOTATA DI UN OFFSET</b>	
<b>(MODELLO 2D).....</b>	<b>61</b>
<b>ANALISI IN GRANDI SPOSTAMENTI DI UN TELAIO CON ELEMENTI</b>	
<b>DOTATI DI SVINCOLI INTERNI (MODELLO 3D).....</b>	<b>63</b>
<b>ANALISI IN GRANDI SPOSTAMENTI DI UN ARCO RIBASSATO (MODELLO TRUSS 2D).....</b>	<b>64</b>
<b>ASTA DI EULERO.....</b>	<b>66</b>

INSTABILITÀ DI UN ARCO CIRCOLARE.....	68
INSTABILITÀ LATERALE DI UNA TRAVE A MENSOLA.....	70
INSTABILITÀ DI UN PORTALE INCERNIERATO ALLA BASE.....	72
CONFRONTO TRA LA FORMULAZIONE SECANTE E CLASSICA.....	73
INSTABILITÀ TORSIONALE DI UNA COLONNA.....	74
LEGAME A TRILATERA PER CJOINT.....	75
PIASTRA ORTOTROPA SOTTO UN CARICO TRASVERSALE UNIFORME.....	77
PIASTRA ORTOTROPA – PATCH TEST COMPORTAMENTO MEMBRANALE.....	78
FLESSIONE PURA DI UNA PIASTRA ORTOTROPA – PATCH TEST ELEMENTI QF46 DISTORTI.....	79
DEFINIZIONE VINCOLI OBLIQUI.....	80
MEMBRANA ELLITTICA.....	81
SEMISFERA.....	84
MENSOLA CON SEZIONE A Z.....	86
PIASTRA DEFORMATA.....	89



## INTRODUZIONE

Scopo del presente manuale è quello di descrivere i risultati di una serie di test di verifica dell'accuratezza e della validità dei diversi tipi di elementi finiti contenuti nel programma XFINEST.

Nello sviluppo di questi test, si sono tenuti in considerazione i diversi fattori che possono influire sull'accuratezza dei risultati. Tali fattori possono essere genericamente riassunti in fattori legati alla geometria dei singoli elementi o alla geometria del problema da esaminare, ai tipi di carico, alle caratteristiche dei materiali.

I problemi di tipo geometrico possono presentarsi sia a livello di geometria del singolo elemento che a livello della geometria da discretizzare. Nel primo caso il problema da affrontare è quello di verificare il comportamento dell'elemento quando questo si presenta in forma notevolmente distorta, nel secondo caso invece il problema è quello di verificare se una geometria complessa può portare a risultati poco attendibili per effetto di problemi di interazione tra elementi contigui. In quest'ottica si sono quindi realizzati un insieme di patch test per la verifica del singolo elemento e una serie di problemi a geometria relativamente complessa (trave a sezione variabile, volta cilindrica, sfera).

Riguardo ai tipi di carico, si è cercato di costruire una serie di esempi in grado di coinvolgere tutte le possibilità disponibili per ciascun tipo di elemento.

È stata poi esaminata la sensibilità dei risultati al variare delle caratteristiche del materiale in particolare la stabilità dei risultati al tendere del coefficiente di Poisson a 0.5 che, come noto, rappresenta una situazione critica per gli elementi finiti formulati secondo gli approcci classici.

Nelle pagine successive sono riportati in maniera dettagliata i risultati più significativi emersi dalle prove.

I file di input dei vari modelli sono memorizzati su dischetto, insieme ad altri test di qualifica che, per brevità, non vengono descritti in questo manuale.

## PATCH TEST ERRORE: SORGENTE DEL RIFERIMENTO NON TROVATA

Verificare il rispetto delle condizioni di convergenza di elementi ISOSHELL, ISO2, ISO3, QF46 e BEAM caratterizzati da forma irregolare.

### SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici:</b>	
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Elastica Lineare
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	ISOSHELL, QF46, ISO2, ISO3, BEAM
<b>File:</b>	ISOPTCA, ISOPTCB, EL3DPTCA, EL3DPTCB, EL2DPTCA, EL2DPTCB, BEAMPTC, BEAMPTCA, QF46PTCA.

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Il problema consiste nel tentare di riprodurre uno stato di deformazione costante all'interno di una regione schematizzata con elementi di forma qualunque. Lo stato di deformazione è generato imponendo un insieme opportuno di cedimenti vincolari sui bordi della regione considerata. Tale stato di deformazione (o stato di sforzo) costante può essere confrontato con quello calcolato analiticamente.

L'importanza del test risiede nel fatto che affinché degli elementi possano garantire una soluzione affidabile, essi devono poter riprodurre uno stato di deformazione costante, per qualsiasi configurazione geometrica. Pertanto i patch test sono particolarmente significativi se affrontati con mesh distorte.

I patch test vengono organizzati in modo da stimolare il comportamento tipico dell'elemento in esame; pertanto si decide di indagare :

- A. lo stato tensionale flessionale e membranale degli elementi ISOSHELL e QF46
- B. lo stato tensionale degli elementi ISO3
- C. lo stato tensionale membranale degli elementi ISO2
- D. lo stato tensionale flessionale degli elementi BEAM

L'elenco dei test eseguiti è il seguente:

1. Esempio ISOPTCA : stato di deformazione flessionale e membranale per ISOSHELL
2. Esempio ISOPTCB : stato di deformazione membranale per ISOSHELL degenerati a membrana
3. Esempio EL3DPTCA: stato di deformazione per ISO3/8 nodi
4. Esempio EL3DPTCB: stato di deformazione per ISO3/20 nodi
5. Esempio EL2DPTCA: stato di deformazione membranale per ISO2/4 nodi
6. Esempio EL2DPTCB: stato di deformazione membranale per ISO2/20 nodi
7. Esempio BEAMPTC : curvatura costante imposta a elementi BEAM
8. Esempio BEAMPTCA: curvatura costante imposta a elementi BEAM
9. Esempio QF46PTCA : stato di deformazione flessionale e membranale per elementi QF46

# PATCH TEST MEMBRANALE ELEMENTI ISOSHELL DEGENERATI A MEMBRANA

DATI :

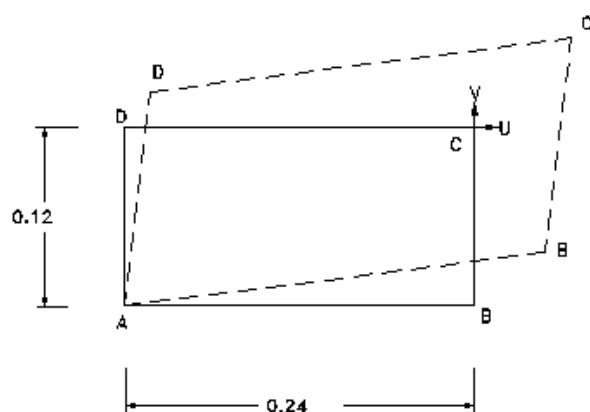
$E = 1.0e+6$

$\alpha = 0.0$

$\nu = 0.25$

$\gamma = 0.0$

thick = 0.001



Condizione di carico 1 :

Stato di deformazione impresso  
tramite spostamenti imposti  
sul bordo

UA = 0.0

VA = 0.0

UB = 0.00024

VB = 0.00012

UC = 0.00030

VC = 0.00024

UD = 0.00006

VD = 0.00012



## PATCH TEST FLESSIONALE ELEMENTI ISOSHELL

DATI :

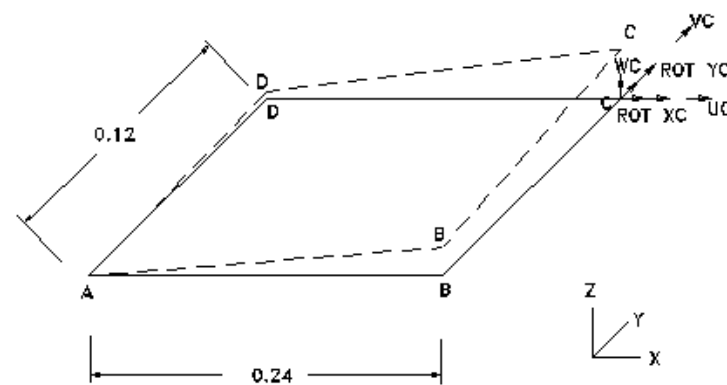
$E = 1.0e+6$

$\alpha = 0.0$

$\nu = 0.25$

$\gamma = 0.0$

thick = 0.001



Condizione di carico 1 :

Stato di deformazione impresso  
tramite spostamenti imposti  
sul bordo

$U_A = 0.0$   
 $V_A = 0.0$   
 $U_B = 0.00024$   
 $V_B = 0.00012$   
 $U_C = 0.00030$   
 $V_C = 0.00024$   
 $U_D = 0.00006$   
 $V_D = 0.00012$

Condizione di carico 2 :

Stato di deformazione impresso  
tramite spostamenti imposti  
sul bordo

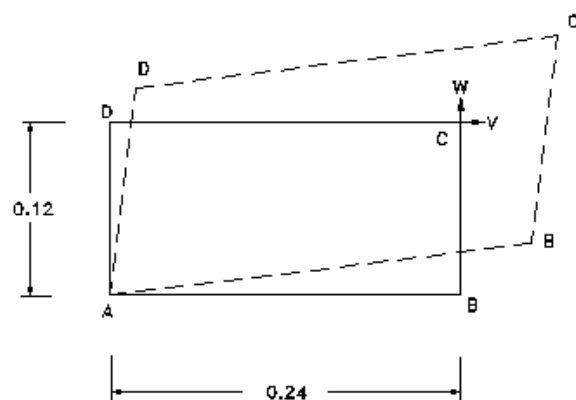
$W_A = 0.0$   
 $ROT-XA = 0.0$   
 $ROT-XB = 0.0$   
 $W_B = 5.76e-5$   
 $ROT-XB = .00012$   
 $ROT-YB = -.00024$   
 $W_C = 10.08e-5$   
 $ROT-XC = .00024$   
 $ROT-YC = -.00030$   
 $W_D = 1.44e-5$   
 $ROT-XD = .00012$   
 $ROT-YD = -.00006$

## PATCH TEST ELEMENTI ISO2D

DATI :

 $E = 1.0e+6$  $\alpha = 0.0$  $\nu = 0.25$  $\gamma = 0.0$ 

thick = 0.001



Condizione di carico 1 :

Stato di deformazione impresso  
tramite spostamenti imposti  
sul bordo

VA = 0.0

WA = 0.0

VB = 0.00024

WB = 0.00012

VC = 0.00030

WC = 0.00024

VD = 0.00006

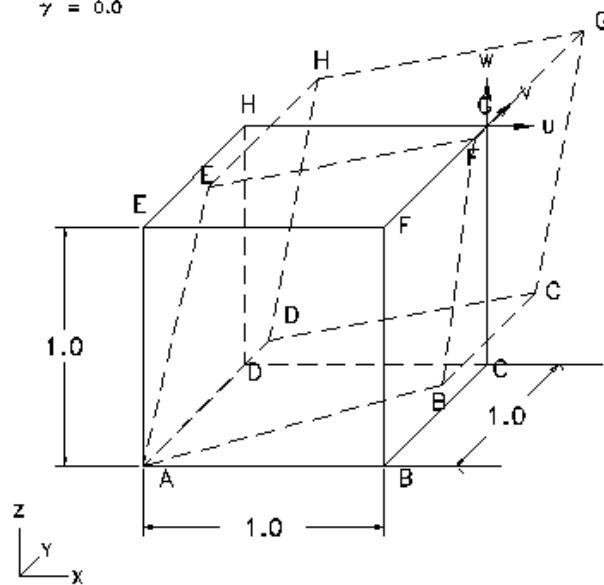
WD = 0.00012



## PATCH TEST ELEMENTI ISO3

DATI :

$E = 1.0e+6$   
 $\alpha = 0.0$   
 $\nu = 0.25$   
 $\gamma = 0.0$



Condizione di Carico 1 :

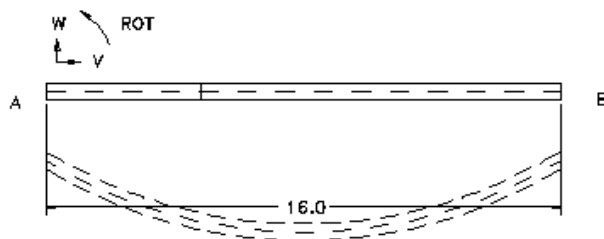
Carico tipo odisp

UA = 0.0	UD = 0.0010	UG = 0.0020
VA = 0.0	VD = 0.0005	VG = 0.0020
WA = 0.0	WD = 0.0005	WG = 0.0020
UB = 0.0005	UE = 0.0005	UH = 0.0015
VB = 0.0005	VE = 0.0010	VH = 0.0015
WB = 0.0010	WE = 0.0005	WH = 0.0010
UC = 0.0015	UF = 0.0010	
VC = 0.0010	VF = 0.0015	
WC = 0.0015	WF = 0.0015	

## PATCH TEST ELEMENTI BEAM

DATI :

$E = 1.0e+5$	Area = 1.0
$\alpha = 1.e-05$	Atag2= 1.0
$\nu = 0.25$	Atag3= 1.0
$\gamma = 1.0$	J2 = 0.011
	J3 = 0.011
	Kt = 1.0



Condizione di carico 1 :  
Stato di deformazione imposto  
tramite spostamenti imposti  
sul bordo

WA	= -32.0
ROT-A	= 8.0
WB	= -32.0
ROT-B	= -8.0

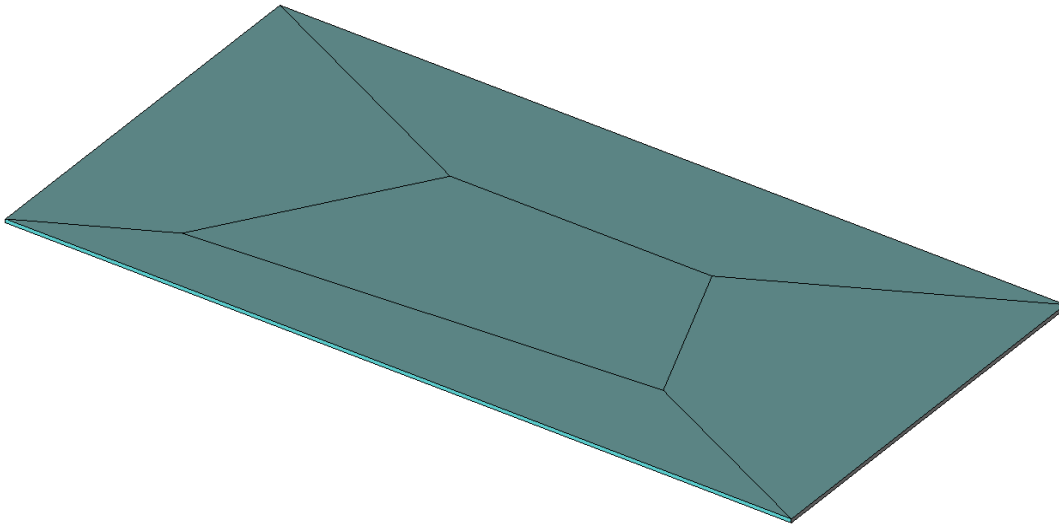


## MODELLO AD ELEMENTI FINITI

I dati salienti sui modelli sono riportati nella tabella seguente.

Esempio	n. Nodi	n. Elementi	n. Equazioni	Tipo elemento.
ISOPTCA	8	5	48	ISOSHELL
ISOPTCB	8	5	48	ISOSHELL/membr.
EL3DPTCA	16	7	48	ISO3
EL3DPTCB	48	7	108	ISO3
EL2DPTCA	8	5	16	ISO2/4n
EL2DPTCB	25	5	42	ISO2/9n
BEAMPTC	4	1	18	BEAM
BEAMPTCA	8	5	36	BEAM
QF46PTCA	8	5	48	QF46

Nella figura seguente è riportata la mesh relativa ad uno dei casi analizzati





**NOTE**

La caratteristica principale dei patch test sta nel fatto che, se un elemento porta a risultati corretti durante questo tipo di test, qualsiasi problema risolto con l'uso di questi elementi converge alla soluzione corretta, indipendentemente dalla forma degli elementi utilizzati. Questo è dovuto al fatto che, all'infittirsi della mesh, lo stato di sforzo all'interno di un elemento deve tendere a un valore costante. Infatti, al limite, un modello con un numero infinito di elementi deve coincidere esattamente con il continuo. Bisogna però sottolineare che la convergenza alla soluzione esatta al crescere del numero di gradi di libertà utilizzati, pur essendo garantita, può essere più o meno rapida (questo dipende dal tipo di elemento). Un punto essenziale di questo tipo di test è che la forma degli elementi risulti distorta, al fine di verificare il comportamento degli elementi in situazioni simili alle mesh reali, caratterizzate da contorni più o meno regolari. Per una completa trattazione di questa tecnica di qualifica si rimanda a [2] e [3].

Nei test trattati gli elementi sono distorti ma la regione nel suo complesso è regolare. Tale scelta (conforme a quanto descritto in [1]) è stata dettata dalla semplicità di generare uno stato di sforzo costante sulla base di semplici condizioni di spostamenti impressi sui nodi di bordo.

Una nota particolare va fatta all'esempio EL3DPTCB dove le condizioni di vincolo sui bordi del cubo sono state imposte sfruttando la tecnica dei multi point constraint che ha consentito di definire gli spostamenti nei nodi di spigolo lasciando poi al programma il compito di calcolare quelli dei nodi intermedi.

**Per il patch test degli elementi QF46, si faccia riferimento alle figure degli elementi ISOSHELL (Fig 2-1, 2-2).**

**RISULTATI**

Nelle tabelle seguenti vengono riportati i risultati dei vari casi. I risultati teorici sono tratti da [1].

Per il test relativo al caso BEAM i risultati sono stati calcolati con riferimento alla teoria tecnica delle travi, trascurando gli effetti dovuti al taglio.

Si noti che, in tutti i casi esaminati, i patch test hanno dato esito positivo.

*PATCH TEST MEMBRANALE ELEMENTI ISO2, ISOSHELL E QF46 :*

Esempio	Cond. Carico	Grandezza	Elemento	Valore calcolato	Valore Teorico	Valore Normalizzato o al teorico (%)
ISOPTCA QF46PTCA	1	SIG-22	2	1241.0		-
	1	SIG-33	2	1426.0		-
	1	TAU-23	2	389.1		-
	1	SIG-X	2	1333.5	1333.0	100.0
	1	SIG-Y	2	1333.5	1333.0	100.0
	1	TAU-XY	2	399.9	400.0	100.0
ISOPTCB	1	SIG-22	2	1241.0		-
	1	SIG-33	2	1426.0		-
	1	TAU-23	2	389.1		-
	1	SIG-X	2	1333.5	1333.0	100.0
	1	SIG-Y	2	1333.5	1333.0	100.0
	1	TAU-XY	2	399.9	400.0	100.0
EL2DPTCA	1	SIG-X	ALL	1333.0		100.0
	1	SIG-Y	ALL	1333.0		100.0
	1	TAU-XY	ALL	400.0		100.0
EL2DPTCB	1	SIG-X	ALL	1333.0		100.0
	1	SIG-Y	ALL	1333.0		100.0
	1	TAU-XY	ALL	400.0		100.0

*PATCH TEST FLESSIONALE ELEMENTI ISOSHELL:*

Esempio	Cond. Carico	Grandezza	Elemento	Valore Calcolato	Valore Teorico	Valore Normalizzato al teorico (%)
ISOPTCA	2	MOM-22	2	1.034E-7		-
	2	MOM-33	2	1.188E-7		-
	2	MOM-23	2	3.242E-8		-
	2	MOM-X	2	1.111E-7	1.111E-7	100.0
	2	MOM-Y	2	1.111E-7	1.111E-7	100.0
	2	MOM-XY	2	3.333E-8	3.333E-8	100.0

*PATCH TEST FLESSIONALE ELEMENTI ISOSHELL:*

Esempio	Cond. Carico	Grandezza	Elemento	Valore	Valore Teorico	Valore Normalizzato al teorico (%)
ISOPTCA	2	MOM-22	2	1.034E-7		-
	2	MOM-33	2	1.188E-7		-
	2	MOM-23	2	3.242E-8		-
	2	MOM-X	2	1.111E-7	1.111E-7	100.0
	2	MOM-Y	2	1.111E-7	1.111E-7	100.0
	2	MOM-XY	2	3.333E-8	3.333E-8	100.0

*PATCH TEST ELEMENTI ISO3:*

Esempio	Cond. Carico	Grandezza	Elemento	Valore	Valore Teorico	Valore Normalizzato al teorico (%)
EL3DPTCA	1	SIG-X	ALL	2000.00	2000	100.0
	1	SIG-Y	ALL	2000.00	2000	100.0
	1	SIG-Z	ALL	2000.00	2000	100.0
	1	TAU-XY	ALL	400.00	400	100.0
	1	TAU-YZ	ALL	400.00	400	100.0
	1	TAU-ZX	ALL	400.00	400	100.0
EL3DPTCB	1	SIG-X	ALL	2000.00	2000	100.0
	1	SIG-Y	ALL	2000.00	2000	100.0
	1	SIG-Z	ALL	2000.00	2000	100.0
	1	TAU-XY	ALL	400.00	400	100.0
	1	TAU-YZ	ALL	400.00	400	100.0
	1	TAU-ZX	ALL	400.00	400	100.0

*PATCH TEST FLESSIONALE ELEMENTI BEAM:*

Esempio	Cond. Carico	Grandezza	Elemento	Valore	Valore Teorico	Valore Normal izzato al teorico (%)
BEAMPTC BEAMPTCA	1 1 1	M2A T2A,T3A NA	ALL ALL ALL	1100.00 0.00 0.00	1100	100.0 - -

## TUBO SPESSO DI LUNGHEZZA INFINITA

### SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici:</b>	McNeal R.H., Harder R.L. <i>"A proposed standard set of problems to test finite element accuracy"</i> , Finite Element in Analysis and Design, Vol.1, pagg. 3-20. (1985)
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Elastica Lineare
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	ISO2
<b>File:</b>	EL2D2A, EL2D2B

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Si vuole calcolare lo spostamento radiale dei punti interni di un tubo infinitamente lungo e di spessore non trascurabile rispetto al raggio medio, soggetto a una pressione unitaria al suo interno. I dati geometrici e meccanici sono riportati in figura. L'esempio serve anche per i seguenti scopi:

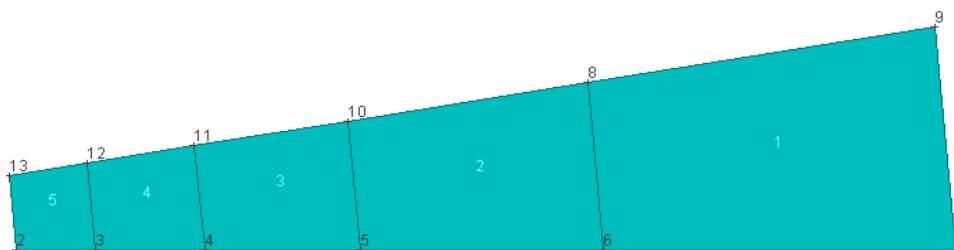
1. Verificare l'implementazione degli elementi ISO2 per un problema in stato piano di deformazione.
2. Verificare la stabilità dei risultati al variare del coefficiente di Poisson, in particolare con valori di tale coefficiente prossimi a 0.5

### MODELLO AD ELEMENTI FINITI

Le condizioni di simmetria geometrica e di carico consentono di ridurre il problema all'analisi di un settore di tubo con un angolo di apertura pari a 10 gradi sessagesimali. I vincoli sono disposti in modo da rispettare la simmetria cilindrica del problema. I dati principali dei modelli sono i seguenti :

Esempio	n. Nodi	n. Elementi	n. Equazioni	Tipo elemento
EL2D2A	12	5	18	ISO2/4n
EL2D2B	33	5	55	ISO2/9n

Nella figura seguente è riportata la mesh relativa ad uno dei casi analizzati



### NOTE

Una nota particolare va fatta per la simulazione dei vincoli di simmetria cilindrica sul lato inclinato del modello. Si tratta infatti di vincoli circonferenziali che non possono essere definiti in maniera diretta. Si è fatto ricorso alla tecnica dei multi point constraint, collegando lo spostamento lungo l'asse Y allo spostamento lungo Z in modo da consentire spostamenti solo lungo la direzione radiale.

Un'altra nota è rivolta invece alla sensibilità dal parametro coefficiente di Poisson che può influire in maniera sensibile sui risultati ottenuti (si confrontino in proposito i risultati ottenuti con gli elementi a 4 nodi). Si conferma quindi che l'utilizzo di elementi classici, quali quelli previsti da XFINEST, può essere rischioso nella simulazione di materiali incompressibili.

**RISULTATI**

Esempio	Coef. Poisson	Grandezza	Nodo	Valore	Valore Teorico	Valore Normalizzato al teorico (%)
EL2D2A	0.49	SPOST-RAD	1	4.2570E-3	5.0602E-3	84.5
	0.499	SPOST-RAD	1	1.8115E-3	5.0602E-3	35.9
	0.4999	SPOST-RAD	1	0.2689E-3	5.0602E-3	5.3
EL2D2B	0.49	SPOST-RAD	1	5.0329E-3	5.0602E-3	99.9
	0.499	SPOST-RAD	1	4.9916E-3	5.0602E-3	98.6
	0.4999	SPOST-RAD	1	4.4451E-3	5.0602E-3	87.8

## SFERA SOGGETTA A PRESSIONE UNIFORME SULLA SUPERFICIE

### SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici:</b>	
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Elastica Lineare
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	ISO2, ISO3
<b>File:</b>	EL3D4A, EL3D4AA, EL3D4AB, EL2D3A, EL2D3B

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Si vuole calcolare lo stato di sforzo all'interno di una sfera soggetta a un carico di pressione uniforme sulla superficie. Questo consente di verificare l'implementazione dei carichi tipo pressione per gli elementi tipo ISO2 assialsimmetrici e ISO3 nonché l'influenza sui risultati del tipo e numero di gradi di libertà utilizzati.

### MODELLO AD ELEMENTI FINITI

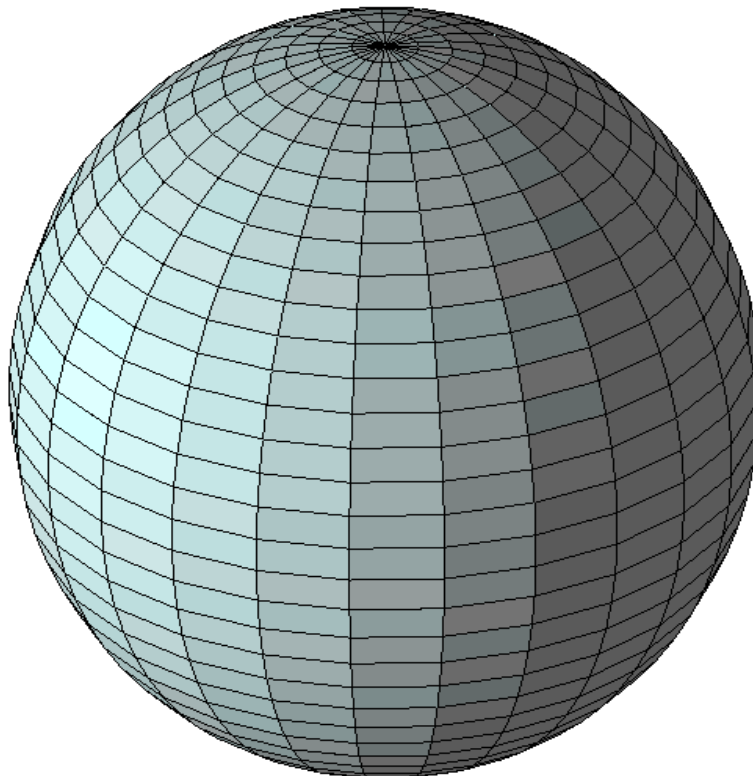
Gli elementi utilizzati sono di tipo ISO3 e ISO2 assialsimmetrici.

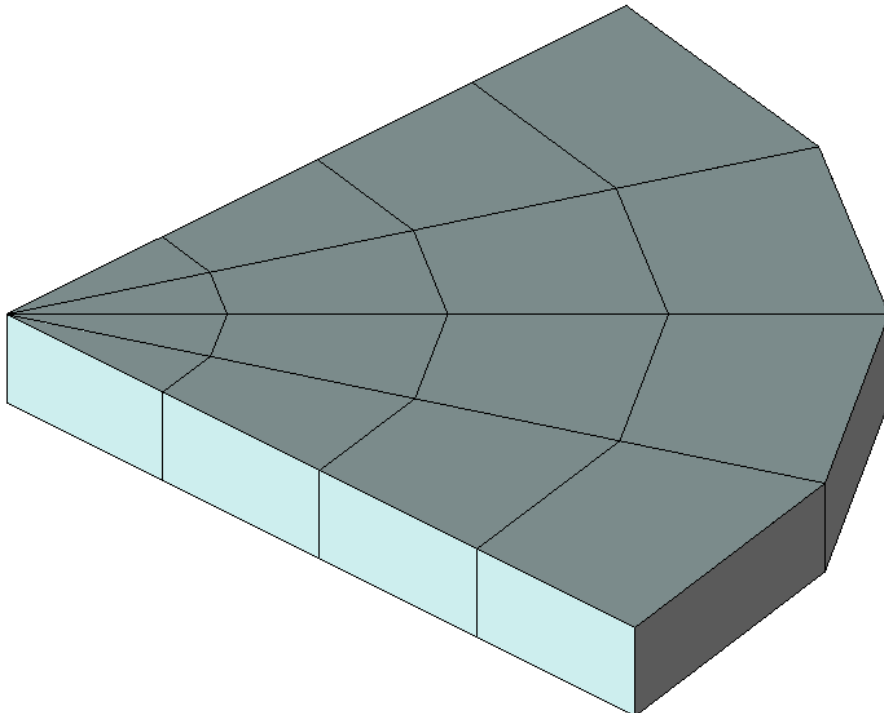
Le caratteristiche dei modelli sono le seguenti :

Esempio	n. Nodi	n. Elementi	n. Equazioni	Tipo elemento
EL3D4A	79	56	237	ISO3/8n
EL3D4AA	232	189	696	ISO3/8n
EL3D4AB	976	875	2928	ISO3/8n
EL2D3A	21	16	42	ISO2/4n/axi.
EL2D3B	21	4	42	ISO2/9n/axi.

La condizione di carico esaminata fa sì che il problema sia autoequilibrato. Si è pertanto provveduto a vincolare la sfera con condizioni di vincolo isostatiche. Le mesh utilizzate sono descritte nelle figure seguenti.

Nella figura seguente è riportata la mesh relativa ad uno dei casi analizzati





### RISULTATI

La sfera è soggetta a uno stato di sforzo isotropo caratterizzato da uno sforzo costante in ogni direzione (pressione) pari alla pressione imposta dall'esterno. Lo sforzo di taglio è ovunque nullo. I risultati dei test sono riportati in tabella :

Esempio	Cond. Carico	Grandezza	Elemento	Valore	Valore Normalizzato al teorico (%)
EL3D4A EL3D4AA EL3D4AB EL2D3A EL2D3B					
	1	SIG-X	ALL	-1.0	100.0
	1	SIG-Y	ALL	-1.0	100.0
	1	SIG-Z	ALL	-1.0	100.0
	1	TAU-XY	ALL	0.0	-
	1	TAU-YZ	ALL	0.0	-
	1	TAU-ZX	ALL	0.0	-



## VOLTA CILINDRICA (PROBLEMA DI SCORDELIS-LO)

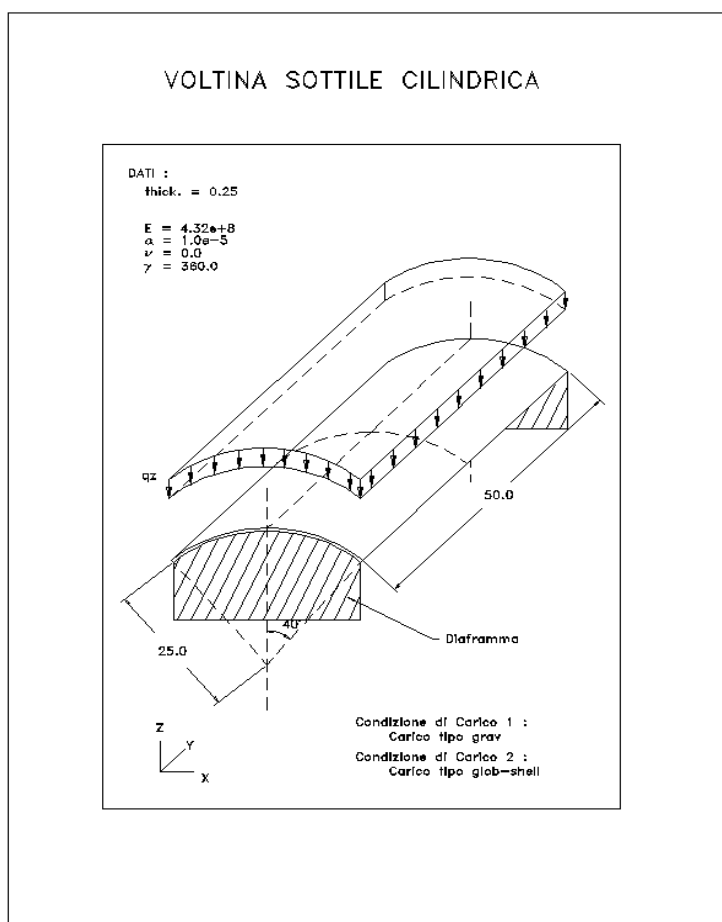
### SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici:</b>	McNeal R.H., Harder R.L. <i>"A proposed standard set of problems to test finite element accuracy"</i> , Finite Element in Analysis and Design, Vol.1, pagg. 3-20. (1985)
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Elastica Lineare
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	ISOSHELL
<b>File:</b>	ISOSH4A, ISOSH4AA, ISOSH4AB

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Si vuole calcolare lo spostamento orizzontale del nodo posto a metà del bordo libero della volta descritta in figura, per effetto del peso proprio della struttura. Si tratta di una volta sottile cilindrica ( rapporto spessore/raggio=.01 ) sorretta lungo i lati minori da diaframmi supposti rigidi nel loro piano e privi di rigidezza flessionale fuori piano. Nessun vincolo è invece imposto lungo i bordi longitudinali della volta. L'esempio consente di esaminare i seguenti aspetti:

1. Verificare il comportamento degli elementi isoshell in condizioni di non complanarità degli elementi e in presenza di carichi di tipo distribuito e gravità.
2. Evidenziare l'influenza della densità della mesh sui risultati ottenuti e la convergenza al risultato previsto dalla teoria al crescere del numero di gradi di libertà utilizzati.

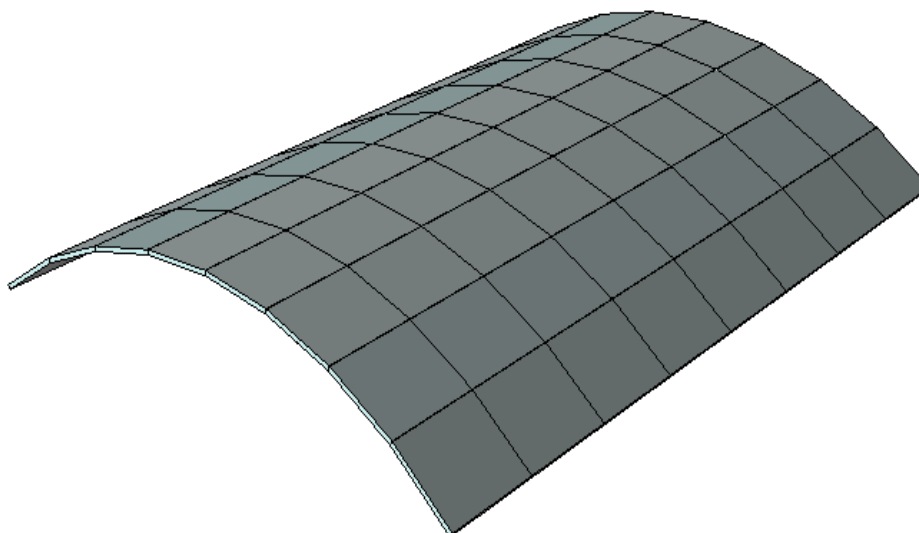


### MODELLO AD ELEMENTI FINITI

Le condizioni di simmetria geometrica e di carico consentono di ricondurre il problema all'analisi di un solo quarto di volta. I nodi in corrispondenza del diaframma rigido hanno gli spostamenti bloccati nel piano del diaframma. Condizioni di vincolo di simmetria sono invece imposti lungo gli assi mediani della volta. Per confronto, la stessa situazione di carico (peso proprio) è stata simulata con diverse tipologie di carico : gravità, carico distribuito sugli elementi, carico distribuito su una regione di nodi. I dati caratteristici del problema sono riportati in tabella.

Esempio	n. Nodi	n. Elementi	n. Equazioni	Tipo elemento
ISOSH4A	25	16	150	ISOSHELL
ISOSH4AA	81	64	486	ISOSHELL
ISOSH4AB	289	256	1734	ISOSHELL

Nella figura seguente è riportata la mesh relativa ad uno dei casi analizzati



### NOTE

L'esempio in esame è un test tipico per la verifica del comportamento degli elementi shell. Esso consente infatti di verificare il comportamento dell'elemento in presenza sia di sollecitazioni membranali che flessionali e di controllare l'interazione degli elementi quando questi discretizzano una geometria relativamente complessa come è quella di una superficie a semplice curvatura. In questo esempio, assume particolare importanza la necessità di rimuovere la labilità rotazionale attorno alla normale degli elementi shell (drilling mode).

### RISULTATI

Il valore teorico dello spostamento è pari a 0.3086. McNeal e Harder in [1] riferiscono però che molti programmi ad elementi finiti convergono a un valore leggermente più basso e pari a 0.3024. Si è scelto pertanto questo secondo valore come valore di riferimento per la normalizzazione dei risultati. In tabella vengono riportati i valori degli spostamenti ottenuti con i vari modelli.

Esempio	Condizione Carico	Nodo	Spostamento	Spostamento Normalizzato al teorico (%)
ISOSH4A	1	405	0.2849	94.2
	2	405	0.2849	94.2
	3	405	0.2849	94.2
ISOSH4AA	1	801	0.2953	97.7
	2	801	0.2953	97.7
	3	801	0.2953	97.7
ISOSH4AB	1	1617	0.3047	100.7
	2	1617	0.3047	100.7
	3	1617	0.3047	100.7

## PIASTRA CIRCOLARE APPOGGIATA CON CARICHI DISTRIBUITI

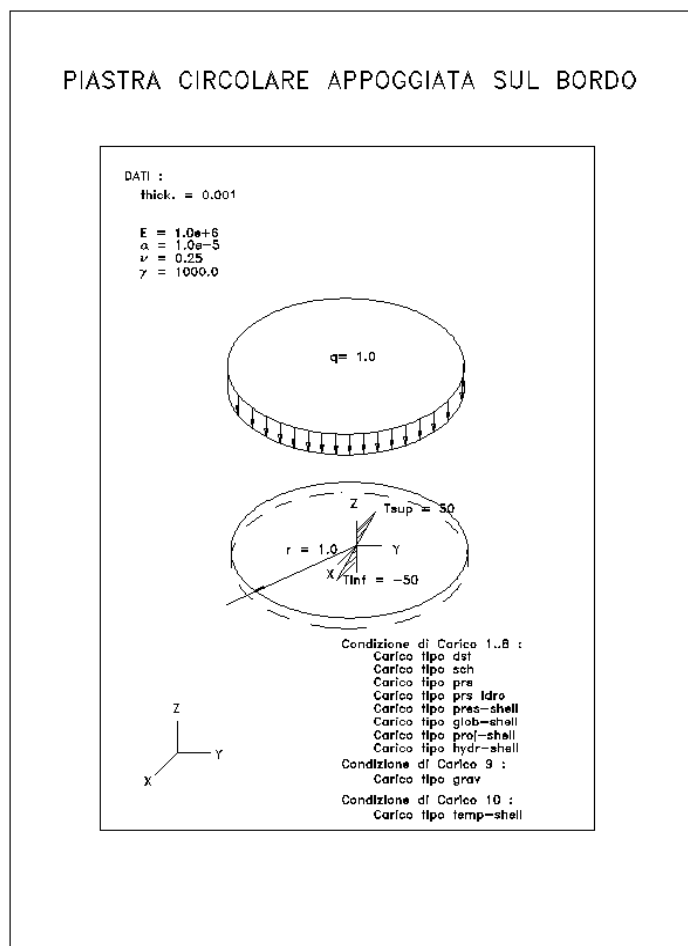
## SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici:</b>	Young W.C. "Roark's Formulas for Stress and Strains", 6th. Ed., McGraw-Hill Co., (1989).
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Elastica Lineare
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	ISOSHELL, QF46
<b>File:</b>	ISOSH1A, QF46-1A

## DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Si vogliono calcolare la freccia al centro e la rotazione all'appoggio di una piastra circolare soggetta a un carico distribuito uniforme e a un gradiente termico. Questo esempio consente di verificare l'implementazione dei carichi concentrati, distribuiti e gravità per gli elementi ISOSHELL e QF46.

I dati geometrici e meccanici del problema sono descritti in figura.

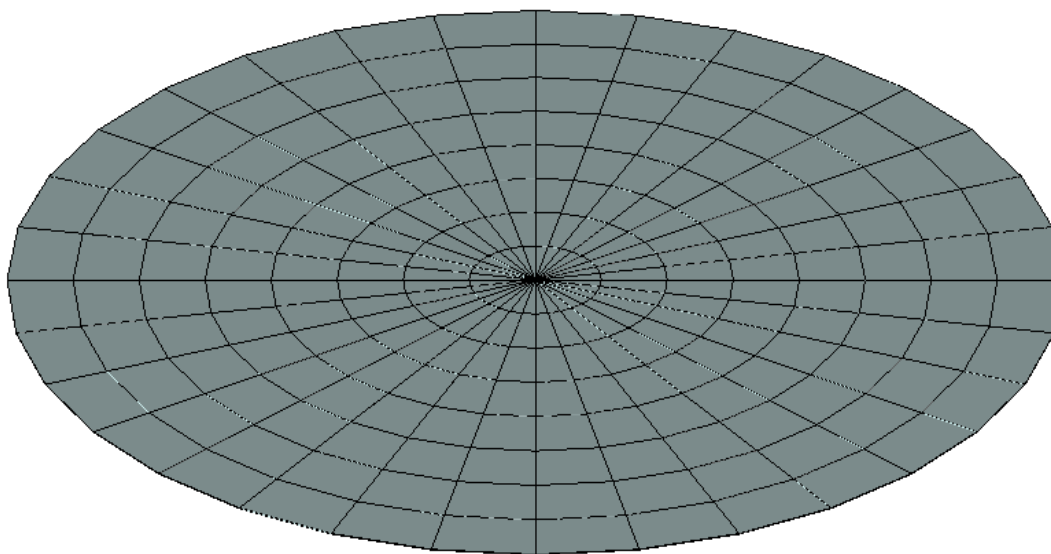


### MODELLO AD ELEMENTI FINITI

Gli elementi utilizzati sono di tipo ISOSHELL. Viste le condizioni di simmetria geometrica e di carico, il problema è stato ricondotto all'analisi di un quarto di piastra. I vincoli sono disposti in modo da rispettare la simmetria del problema. Caratteristiche principali del modello :

Esempio	n. Nodi	n. Elementi	n. Equazioni	Tipo elemento
ISOSH1A	81	64	486	ISOSHELL
QF46-1A	81	64	486	QF46

Nella figura seguente è riportata la mesh relativa ad uno dei casi analizzati



### NOTE

L'analisi è stata svolta simulando il carico uniforme con i diversi tipi di carico disponibili in Xfinest al fine di confrontare i risultati forniti dai diversi approcci.

Si può notare una lieve differenza tra l'approccio tramite carichi distribuiti su una regione di nodi e quella con carichi distribuiti sugli elementi. Ciò è dovuto al diverso modo con cui i carichi distribuiti vengono riportati ai nodi. Infatti, mentre nel caso di carichi distribuiti su una regione il carico viene concentrato sui nodi in proporzione alla relativa area di influenza, nel caso di carichi distribuiti sugli elementi il programma provvede al calcolo dei carichi nodali equivalenti per ciascun elemento.

Una nota a parte va poi fatta per la condizione di carico 2. In questo caso infatti non viene assegnata la pressione ma il carico totale agente sulla superficie. Tale carico è calcolato come prodotto tra la pressione e l'area di un quarto di cerchio. L'area del modello però, a causa della approssimazione introdotta nella discretizzazione della geometria, è minore di quella teorica. Il carico totale calcolato differisce quindi (per eccesso) da quello considerato nelle altre condizioni di carico ed è causa di una lieve differenza nei risultati rispetto alle altre condizioni di carico.

Per il test relativo agli elementi QF46, si faccia riferimento alle figure 6-1 e 6-2 relative agli elementi ISOSHELL.

**RISULTATI ( ISOSH1A,QF46-1A)**

Esempio	Cond. Carico	Grandezza	Nodo	Valore	Valore Teorico	Valore Normalizzato o al teorico(%)
	1,3,4	SPOST-Z	1	-740.10	-738.28	100.2
	2	SPOST-Z	1	-744.88	-738.28	100.9
	5,6,7,8,9	SPOST-Z	1	-735.54	-738.28	99.6
	10	SPOST-Z	1	-0.50	-0.50	100.0
	1,3,4	ROTAZ-Y	9	-1125.38	-1125.00	100.0
	2	ROTAZ-Y	9	-1132.65	-1125.00	100.7
	5,6,7,8,9	ROTAZ-Y	9	-1119.61	-1125.00	99.5
	10	ROTAZ-Y	9	-0.99	-1.00	99.0

## MENSOLA A SEZIONE VARIABILE

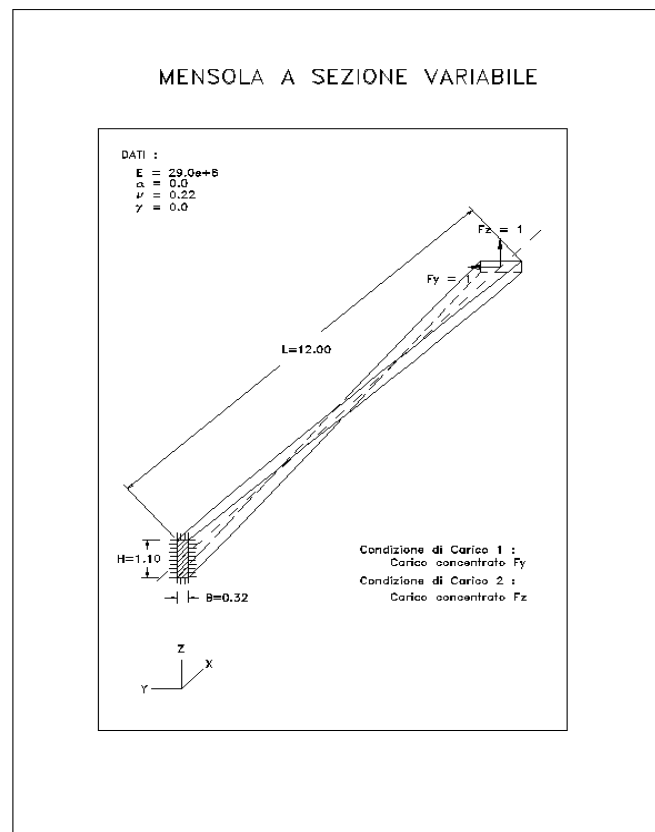
### SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici:</b>	McNeal R.H., Harder R.L. <i>"A proposed standard set of problems to test finite element accuracy"</i> , Finite Element in Analysis and Design, Vol.1, pagg. 3-20. (1985)
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Elastica Lineare
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	ISOSHELL, QF46
<b>File:</b>	ISOSH3A, EL3D3A, EL3D3Aa, EL3D3B, BEAM3A, BEAM3AA, BEAM3AB, QF46-3A

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Si vuole calcolare la freccia di una mensola a sezione variabile (sezione rettangolare rotante lungo l'asse longitudinale della trave) soggetta a carichi concentrati unitari applicati all'estremo libero. Gli spostamenti vengono valutati nella direzione di applicazione dei carichi.

1. Verificare il comportamento degli elementi ISOSHELL, ISO3,QF46 e BEAM nel caso di sollecitazioni sostanzialmente di tipo flessionale dovute a carichi concentrati. Il test è particolarmente significativo per gli elementi ISOSHELL e QF46 in quanto consente di verificare il comportamento di tali elementi in condizioni di non planarità dei quattro nodi del singolo elemento (warping).
2. Confrontare i risultati ottenuti con diversi tipi di elementi.
3. Evidenziare l'influenza della densità della mesh sui risultati ottenuti e la convergenza al risultato previsto dalla teoria al crescere del numero di gradi di libertà utilizzati.



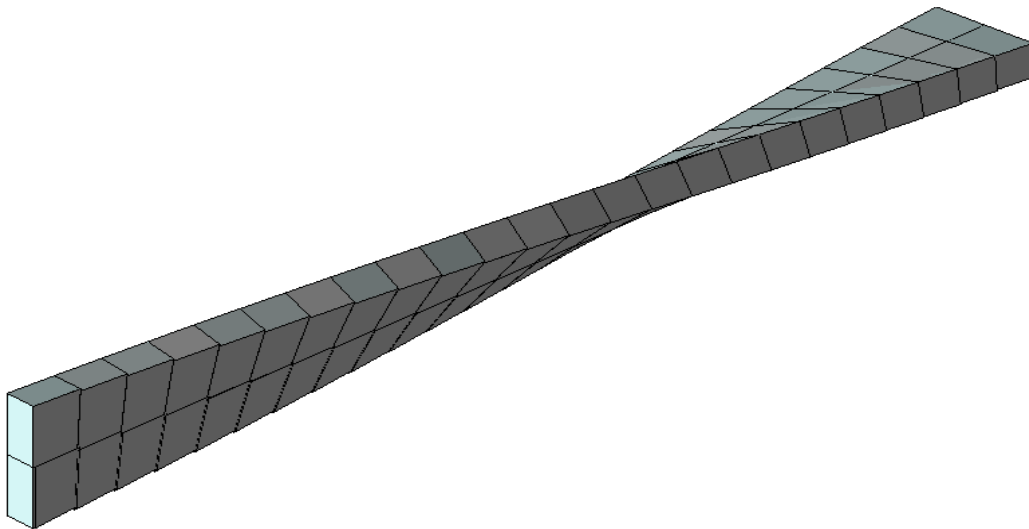
**MODELLO AD ELEMENTI FINITI**

Gli elementi utilizzati sono di tipo ISOSHELL, ISO3, BEAM.

I dati dei modelli sono riportati in tabella :

Esempio	n. Nodi	n. Elementi	n. Equazioni	Tipo elemento
ISOSH3A	39	24	234	ISOSHELL
EL3D3A	117	48	351	ISO3
EL3D3AA	625	384	1875	ISO3
EL3D3B	117	6	240	ISO3
BEAM3A	26	12	78	BEAM
BEAM3AA	50	24	150	BEAM
BEAM3AB	98	48	294	BEAM
QF46-3A	39	24	234	QF46

Nella figura seguente è riportata la mesh relativa ad uno dei casi analizzati





**NOTE**

È un esempio tipico per la verifica del comportamento degli elementi shell. Esso consente infatti di esaminare il comportamento dell'elemento per effetto di sollecitazioni nel piano e fuori piano quando i quattro nodi dell'elemento non sono complanari. Per confronto, il problema è stato affrontato anche con l'uso di elementi ISO3 e BEAM. Da segnalare l'ottimo comportamento degli elementi ISOSHELL,QF46 ed ISO3 20 nodi. Meno rapida invece la convergenza alla soluzione corretta nel caso di elementi ISO3 a 8 nodi. In questo esempio - se risolto con elementi ISOSHELL - è determinante la possibilità di poter eliminare la labilità alla rotazione attorno alla normale al piano medio (drilling mode). Per il test degli elementi QF46, si faccia riferimento alle figure 7-1 e 7-2 relative agli elementi ISOSHELL.

**RISULTATI**

Esempio	Condizione Carico	Nodo	Spostamento	Valore Teorico	Spostamento Normalizzato al teorico (%)
ISOSH3A	1	121	0.005392	0.005424	99.4
	2	121	0.001607	0.001754	95.2
EL3D3A	1	1201	0.001129	0.005424	20.8
	2	1201	0.000586	0.001754	33.3
EL3D3AA	1	2401	0.002729	0.005424	50.3
	2	2401	0.001055	0.001754	60.1
EL3D3B	1	1201	0.005218	0.005424	96.2
	2	1201	0.001710	0.001754	97.5
BEAM3A	1	121	0.005641	0.005424	104.9
	2	121	0.001546	0.001754	88.1
BEAM3AA	1	241	0.005543	0.005424	102.1
	2	241	0.001643	0.001754	93.7
BEAM3AB	1	481	0.005491	0.005424	101.2
	2	481	0.001696	0.001754	96.7
QF46-3A					
6DOF_BUBBLE	1	121	0.005771	0.005424	106.4
6DOF_BUBBLE	2	121	0.001984	0.001754	113.1
QF46-3A					
6DOF	1	121	0.005722	0.005424	105.5
6DOF	2	121	0.001975	112.5	

## MENSOLA AD ASSE CIRCOLARE

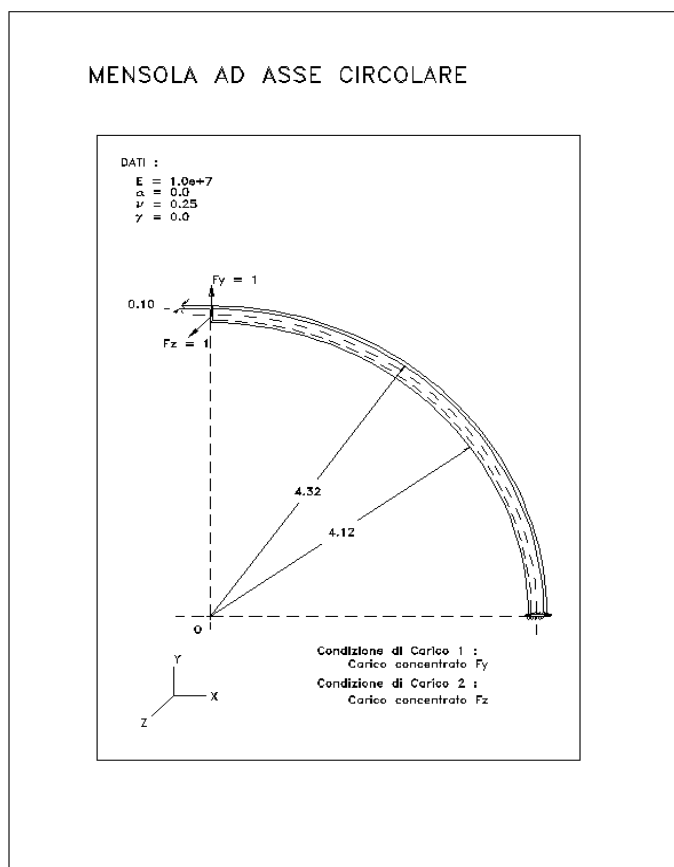
### SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici:</b>	McNeal R.H., Harder R.L. <i>"A proposed standard set of problems to test finite element accuracy"</i> , Finite Element in Analysis and Design, Vol.1, pagg. 3-20. (1985)
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Elastica Lineare
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	ISOSHELL, ISO3 e BEAM
<b>File:</b>	ISOSH2A, ISOSH2AA, ISOSH2AB, ISOSH2AC, ISOSH2AD, EL3D2A, EL3D2AA, EL3D2AB, EL3D2AC, EL3D2AD, EL3D2B, EL3D2BA, BEAM2A, QF46-2A

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Si vuole calcolare la freccia di una mensola ad asse circolare sotto l'effetto di carichi concentrati unitari applicati all'estremo libero. Gli spostamenti vengono valutati nella direzione di applicazione dei carichi. I dati geometrici e meccanici del problema sono descritti in figura. L'esempio consente anche di:

1. Verificare il comportamento degli elementi ISOSHELL, ISO3 e BEAM nel caso di sollecitazioni membranali (assiali) e flessionali generate da carichi concentrati. Per gli elementi ISOSHELL e ISO3 il test consente anche di verificare eventuali irregolarità derivanti dalla distorsione della forma degli elementi.
2. Confrontare i risultati ottenuti affrontando lo stesso problema fisico con diversi approcci di modellazione e fornire una traccia per valutare quale di questi approcci sia più conveniente.
3. Evidenziare l'influenza della densità della mesh sui risultati ottenuti e la convergenza al risultato previsto dalla teoria al crescere del numero di gradi di libertà utilizzati.

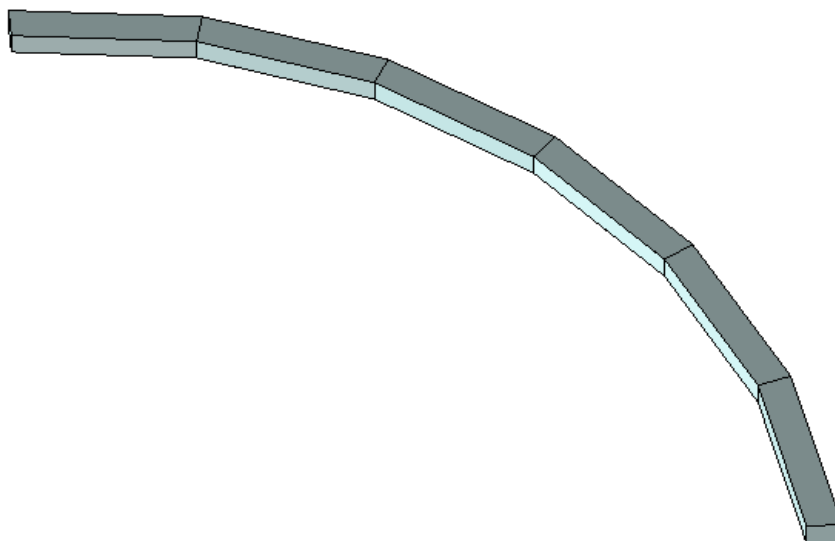


### MODELLO AD ELEMENTI FINITI

Gli elementi utilizzati sono di tipo ISOSHELL, ISO3, BEAM e QF46. Nelle figure seguenti sono riportate le mesh utilizzate nei vari esempi. Le caratteristiche dei modelli sono riassunte in tabella:

Esempio	n. Nodi	n. Elementi	n. Equazioni	Tipo elemento
ISOSH2A	14	6	84	ISOSHELL
ISOSH2AA	26	12	156	ISOSHELL
ISOSH2AB	50	24	300	ISOSHELL
ISOSH2AC	98	48	588	ISOSHELL
ISOSH2AD	147	96	882	ISOSHELL
EL3D2A	28	6	84	ISO3/8n
EL3D2AA	52	12	156	ISO3/8n
EL3D2AB	100	24	300	ISO3/8n
EL3D2AC	196	48	588	ISO3/8n
EL3D2AD	294	96	882	ISO3/8n
EL3D2B	104	6	240	ISO3/20n
EL3D2BA	200	12	456	ISO3/20n
BEAM2A	8	6	42	BEAM
QF46-2A	14	6	84	QF46

Nella figura seguente è riportata la mesh relativa ad uno dei casi analizzati



**NOTE**

È un esempio tipico per la verifica del comportamento degli elementi shell. Esso consente infatti di confrontare il comportamento dell'elemento per effetto di sollecitazioni taglianti nel piano e fuori piano.

I risultati mostrano infatti una diversa risposta dell'elemento a seconda si tratti di problemi membranali (dove si ha una convergenza meno rapida) e quelle flessionali. Altrettanto interessanti sono i risultati ottenuti per gli elementi ISO3 dove si riscontra (a parità di numero di gradi di libertà) una rapidità di convergenza notevole per gli elementi a 20 nodi. Confrontando i risultati forniti dal problema ISOSH2A ed EL3D2A, si osserva che il comportamento membranale dell'elemento ISOSHELL coincide con il comportamento nel piano dell'elemento solido a 8 nodi: infatti, in entrambi i casi, la funzioni di forma sono lineari ed in entrambi i casi le prestazioni dell'elemento sono veramente scadenti. Il comportamento fuori piano dell'elemento solido a 8 nodi si mantiene scadente, mentre il comportamento flessionale dello shell è decisamente brillante. Da sottolineare infine l'ottimo accordo tra i risultati teorici e quelli calcolati nell'esempio QF46-2A. Questo test è molto significativo in quanto consente di evidenziare la notevole precisione dell'elemento QF46 nello schematizzare stati di sollecitazione membranali, anche in presenza di mesh piuttosto rade. Per il test relativo agli elementi QF46, si faccia riferimento alle figure 8-1 e 8-2 relative agli elementi ISOSHELL.

**RISULTATI**

Per effetto di una forza unitaria in direzione Y (nel piano trave).....spost.Y = 0.08734

Per effetto di una forza unitaria in direzione Z (fuori piano trave).....spost.Z = 0.50220

In tabella vengono riportati i valori degli spostamenti ottenuti con i vari modelli.

Esempio	Condizione Carico	Nodo	Spostamento	Valore Teorico	Spostamento Normalizzato al teorico (%)
ISOSH2A	1	61	0.00641	0.08734	7.3
	2	61	0.46650	0.50220	92.3
ISOSH2AA	1	121	0.02134	0.08734	24.4
	2	121	0.47300	0.50220	94.1
ISOSH2AB	1	241	0.04830	0.08734	55.3
	2	241	0.47530	0.50220	94.6
ISOSH2AC	1	481	0.07040	0.08734	80.6
	2	481	0.47600	0.50220	94.8
ISOSH2AD	1	481	0.07328	0.08734	83.9
	2	481	0.47610	0.50220	94.8
EL3D2A	1	61	0.00640	0.08734	7.3
	2	61	0.11700	0.50220	23.3
EL3D2AA	1	121	0.02125	0.08734	24.3
	2	121	0.14570	0.50220	29.0
EL3D2AB	1	241	0.04799	0.08734	55.0
	2	241	0.20600	0.50220	41.0
EL3D2AC	1	481	0.06977	0.08734	79.9
	2	481	0.30620	0.50220	61.0
EL3D2AD	1	481	0.07269	0.08734	83.2
	2	481	0.31400	0.50220	62.5
EL3D2B	1	121	0.07638	0.08734	87.5
	2	121	0.47000	0.50220	93.6
EL3D2BA	1	241	0.08722	0.08734	99.9
	2	241	0.47300	0.50220	94.2
BEAM2A	1	61	0.08729	0.08734	99.9
	2	61	0.49660	0.50220	98.9
QF46-2A	1	61	0.08182	0.08734	93.7
FORM=6DOF	2	61	0.46650	0.50220	92.3
QF46-2A	1	61	0.08775	0.08734	100.5
FORM=6DOF-BUB	2	61	0.46650	0.50220	92.3

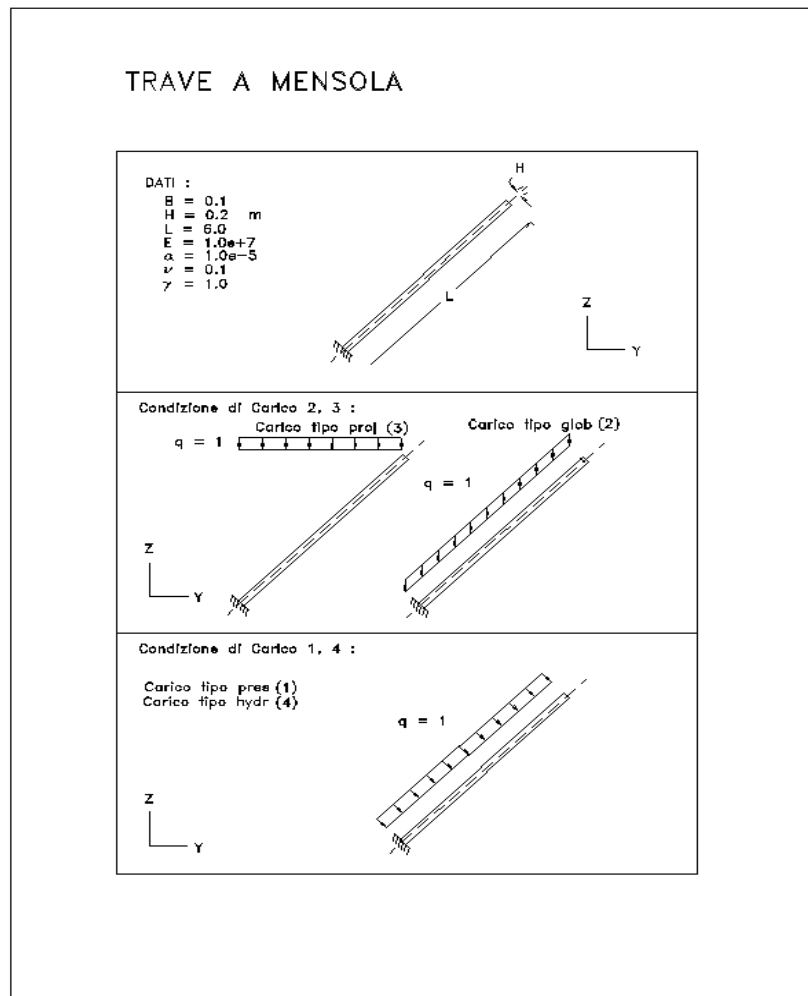
## MENSOLA CON CARICHI DISTRIBUITI

### SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici:</b>	McNeal R.H., Harder R.L. "A proposed standard set of problems to test finite element accuracy", Finite Element in Analysis and Design, Vol.1, pagg. 3-20. (1985)
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Elastica Lineare
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	ISO2 , ISO3
<b>File:</b>	EL2D1A, EL2D1B, EL3D1A, EL3D1AA, EL3D1AB, EL3D1B, EL3D1BA, EL3D1BB

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Si vuole calcolare la freccia di una mensola a sezione rettangolare inclinata a 45 gradi sull'orizzontale e soggetta a carichi distribuiti. Le informazioni sulle caratteristiche della trave e dei carichi sono raccolte in figura. Verificare l'implementazione dei carichi distribuiti per gli elementi ISO2 e ISO3.



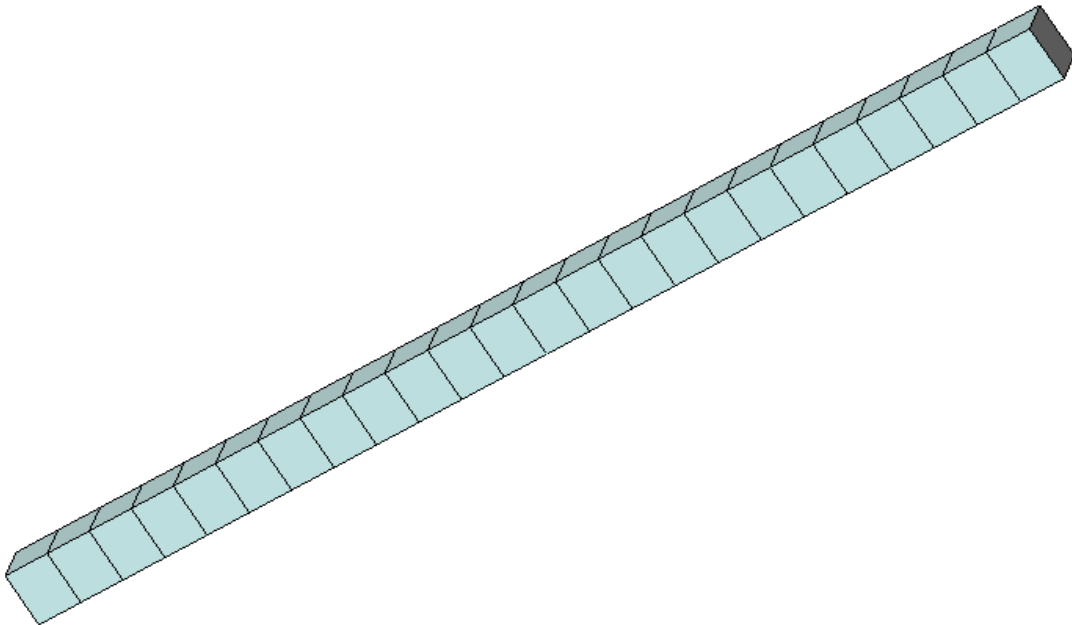
**MODELLO AD ELEMENTI FINITI**

Gli elementi utilizzati sono di tipo ISO2 e ISO3. I vari tipi di mesh utilizzati sono descritti nelle figure seguenti. I dati principali sono descritti nella tabella seguente :

Esempio	n. Nodi	n. Elementi	n. Equazioni
EL2D1A	52	25	112
EL2D1B	77	13	162
EL3D1A	443	193	1335
EL3D1AA	443	385	1335
EL3D1AB	443	1153	1335
EL3D1B	443(*)	25	900
EL3D1BA	443(*)	49	975
EL3D1BB	443	145	1335

(\*) Nota : non tutti i nodi introdotti per la generazione della mesh sono utilizzati come incidenze di elementi.

Nella figura seguente è riportata la mesh relativa ad uno dei casi analizzati



**NOTE**

In questo esempio si è voluto esaminare il comportamento di elementi ISO3 degenerati a elementi pentaedrici e tetraedrici. I modelli hanno tutti lo stesso numero di gradi di libertà: cambia di volta in volta il tipo degli elementi utilizzati. Si può notare come i risultati siano influenzati dal modo in cui l'elemento viene fatto degenerare, così come è evidente il vantaggio dell'uso di elementi a 20 nodi rispetto all'uso di elementi a 8 nodi.

**RISULTATI**

I risultati ottenuti vengono riportati nella tabella seguente. Risultati teorici :

Condizioni di carico 1 e 4      Spostamento teorico in direzione Y = 0.017182  
 Condizioni di carico 2      Spostamento teorico in direzione Y = 0.012510  
 Condizioni di carico 3      Spostamento teorico in direzione Y = 0.008591

Esempio	Cond. Carico	Grandezza	Nodo	Valore	Valore Normalizzato al teorico (%)
EL2D1A	1	SPOST-Y	49	.9780E-2	56.9
	2	SPOST-Y	49	.6605E-2	52.8
	3	SPOST-Y	49	.4670E-2	54.4
	4	SPOST-Y	49	.9748E-2	56.7
EL2D1B	1	SPOST-Y	1049	.1717E-1	99.9
	2	SPOST-Y	1049	.1160E-1	92.7
	3	SPOST-Y	1049	.8214E-2	95.6
	4	SPOST-Y	1049	.1712E-1	99.9
EL3D1A	1	SPOST-Y	1149	.1456E-1	81.7
	2	SPOST-Y	1149	.9837E-2	78.6
	3	SPOST-Y	1149	.6955E-2	81.0
	4	SPOST-Y	1149	.1452E-1	81.5
EL3D1AA	1	SPOST-Y	1149	.1452E-1	81.5
	2	SPOST-Y	1149	.9807E-2	78.4
	3	SPOST-Y	1149	.6934E-2	80.7
	4	SPOST-Y	1149	.1447E-1	81.2
EL3D1AB	1	SPOST-Y	1149	.8920E-2	50.1
	2	SPOST-Y	1149	.6025E-2	48.2
	3	SPOST-Y	1149	.4260E-2	49.6
	4	SPOST-Y	1149	.8890E-2	49.9
EL3D1B	1	SPOST-Y	49	.1680E-1	94.3
	2	SPOST-Y	49	.1134E-1	90.6
	3	SPOST-Y	49	.8025E-2	93.4
	4	SPOST-Y	49	.1674E-1	93.9
EL3D1BA	1	SPOST-Y	49	.1677E-1	94.1
	2	SPOST-Y	49	.1133E-1	90.6
	3	SPOST-Y	49	.8013E-2	93.3
	4	SPOST-Y	49	.1672E-1	93.8
EL3D1BB	1	SPOST-Y	49	.1326E-1	74.4
	2	SPOST-Y	49	.8965E-2	71.7
	3	SPOST-Y	49	.6340E-2	73.8
	4	SPOST-Y	49	.1384E-1	77.7

## PIASTRA INCASTRATA SU UN LATO : ANALISI MODALE

## SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici:</b>	Zienkiewicz O.C. <i>"Finite Element Method - Volume 2: Solid and Fluid Mechanics - Dynamics and Non Linearity"</i> , 4th. Ed, McGraw-Hill Co.,(1989)
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Analisi Modale
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	ISOSHELL, QF46
<b>File:</b>	ISOSH9A, ISOSH9AA, ISOSH9B, ISOSH9BA, QF46-9A.

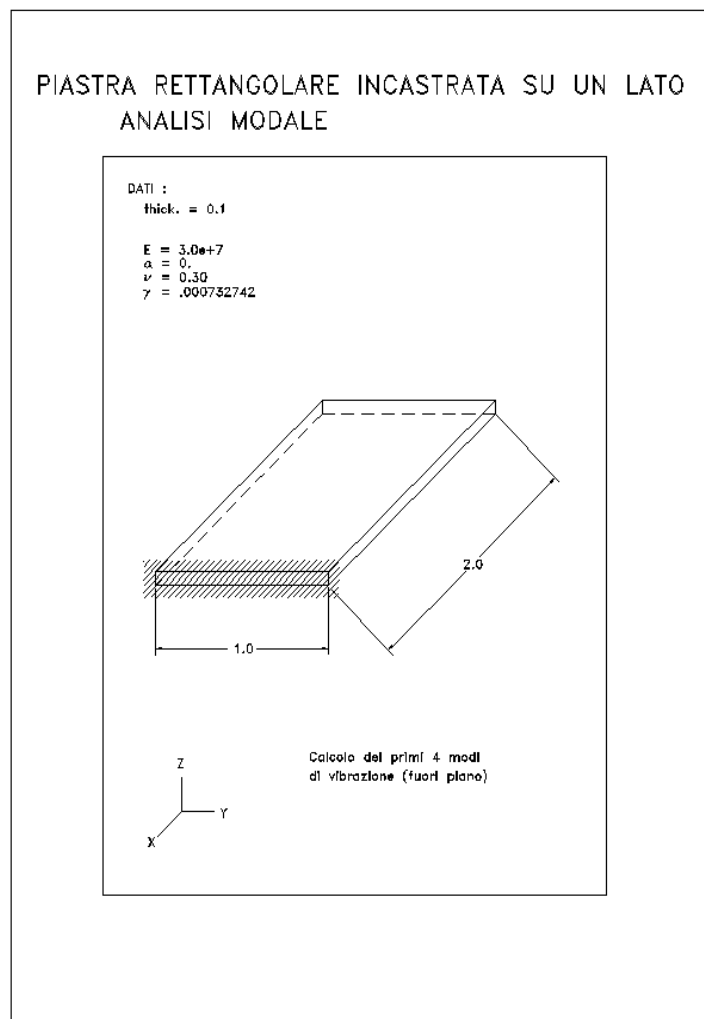
## DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Si vogliono calcolare le prime 4 frequenze relative a modi di vibrare fuori dal piano della piastra (modi flessionali fuori piano e torsionali).

I dati geometrici e meccanici del problema sono descritti in figura.

Verificare l'implementazione del modulo dinamico nel caso di elementi ISOSHELL e QF46.

Il test viene impostato in modo da verificare entrambi i metodi di analisi modale implementati (metodo di Lanczos e Subspace Iteration), a fronte di un calcolo automatico delle masse con un approccio di tipo lumped oppure consistent.





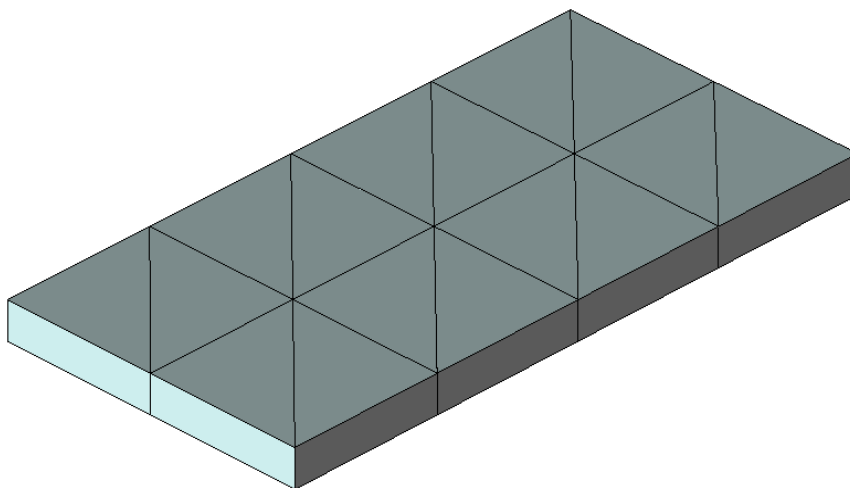
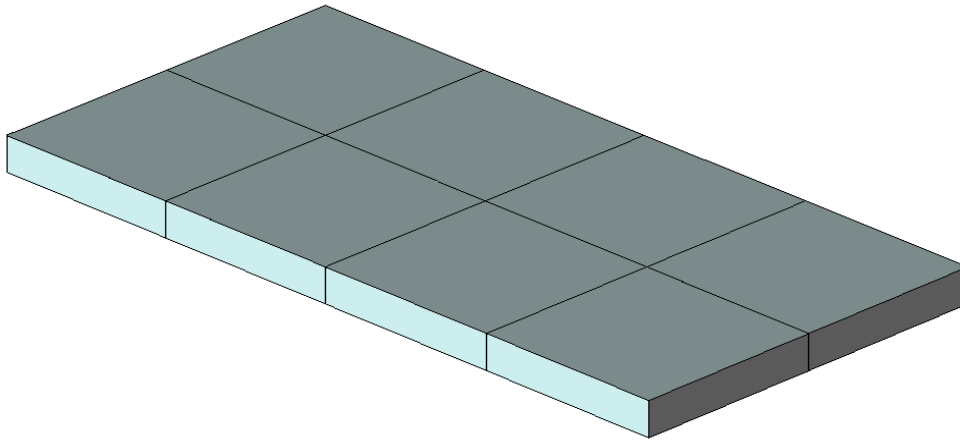
**MODELLO AD ELEMENTI FINITI**

Gli elementi utilizzati sono di tipo ISOSHELL e QF46.

Caratteristiche principali del modello :

Esempio	n. Nodi	n. Elementi	n. Equazioni	Tipo elemento
ISOSH9A	15	8	90	ISOSHELL
ISOSH9AA	45	32	270	ISOSHELL
ISOSH9B	15	16	90	ISOSHELL
ISOSH9BA	45	64	270	ISOSHELL
QF46-9A	15	8	90	QF46

Nelle figure seguenti sono riportate le mesh dei modelli a 15 e 45 nodi.



**NOTE**

Il test consente in primo luogo di valutare l'affidabilità del programma per confronto con i risultati reperibili in letteratura. Il test è però strutturato in modo da poter effettuare delle comparazioni sui risultati al variare del tipo di elemento (ISOSHELL a 3 e 4 nodi) e del numero di gradi di libertà utilizzati. È pertanto possibile confrontare, a parità di gradi di libertà, l'influenza della forma (e del numero) degli elementi utilizzati (confrontando gli esempi ISOSH9A-ISOSH9B e ISOSH9AA-ISOSH9BA), così come è possibile valutare l'effetto del solo infittimento della mesh (ISOSH9A-ISOSH9AA e ISOSH9B-ISOSH9BA).

**RISULTATI**

Tra parentesi è riportato, in percentuale, il rapporto tra la frequenza calcolata e quella teorica.

Risultati teorici :

Modo n.1 .....	846
Modo n.2 .....	3638
Modo n.3 .....	5266
Modo n.4 .....	11870

Risultati dei test :

Esempio	Approccio Subspace Iteration (lumped) Hz	Approccio Subspace Iteration (consistent) Hz	Approccio Lanczos (lumped) Hz	Approccio Lanczos (consistent) Hz
ISOSH9A	824(97)	844(100)	824	844
	2917(80)	3606(99)	2917	3606
	5124(97)	5996(114)	5124	5996
	9153(77)	12798(108)	9153	12798
ISOSH9AA	832(98)	837(99)	832	837
	3340(92)	3537(97)	3340	3537
	5144(98)	5348(102)	5144	5348
	10744(91)	11694(99)	10744	11694
ISOSH9B	805(95)	850(100)	805	850
	3350(92)	4155(114)	3350	4155
	4963(94)	5948(113)	4963	5948
	11244(95)	15234(128)	11244	15234
ISOSH9BA	822(97)	840(99)	822	840
	3396(93)	3621(100)	3396	3621
	5042(96)	5319(101)	5042	5319
	11027(93)	12092(102)	11027	12092
QF46-9A	824(97)	824(97)	824	824
	2917(80)	2917(80)	2917	2917
	5124(97)	5124(97)	5124	5124
	9153(77)	9153(77)	9153	9153

## TRAVE APPOGGIATA

### SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici:</b>	Ray W.Clough, Joseph Penzien "Dynamics of Structures", McGraw-Hill Co., (1975).
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Analisi in frequenza
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	BEAM
<b>File:</b>	FREQ1, FREQ2, FREQ3

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

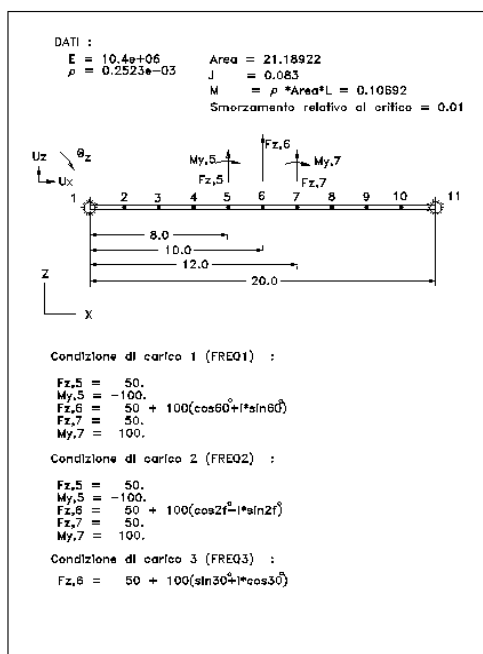
Si considera una trave semplicemente appoggiata soggetta ad un sistema di forzanti armoniche e si calcola la risposta a regime della struttura in corrispondenza di 3 valori di frequenza: 0,30,50 Hz.

L'analisi è svolta considerando solo il primo modo di vibrazione della struttura, dato che, nell'intervallo di frequenze esaminate, la risposta è essenzialmente dovuta a questo modo.

Verificare l'implementazione del modulo dinamico nel caso di elementi BEAM per quanto riguarda l'analisi in frequenza.

Si verificano i risultati di un'analisi in frequenza effettuata secondo il metodo della sovrapposizione modale. Con questo tipo di analisi, i gradi di libertà utilizzati nella soluzione sono i modi di vibrare della struttura. Tale approccio consente una soluzione semplice ed efficace, malgrado la necessità di procedere al calcolo dei modi di vibrazione e procedere alla trasformazione da coordinate modali a nodali.

### ANALISI IN FREQUENZA: TRAVE APPOGGIATA



**MODELLO AD ELEMENTI FINITI**

Gli elementi utilizzati sono di tipo BEAM.

Caratteristiche principali del modello :

Esempio	n. Nodi	n. Elementi	n. Equazioni	Tipo elemento
FREQ1, FREQ2, FREQ3	11	10	30	BEAM

**NOTE**

1. L'algoritmo usato da Xfinest per l'analisi modale normalizza gli autovettori rispetto alla matrice di massa. Pertanto la massa modale risulta pari a 1.0.
2. Per valori della frequenza pari a 30 cicli per secondo, i tre casi descritti sono esattamente identici.

**RISULTATI**

Nel caso della trave ad una campata, i valori delle frequenze dei modi propri di vibrazione, sono espressi dalla formula (rif [1]):

$$f_n = \frac{n^2 p^2}{(2p) l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}} = 50, 200, 450, 800, \dots$$

I modi di vibrare sono esprimibili come :

$$\phi_n(x) = \left( \sqrt{\int_0^l \rho A \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \sqrt{\frac{2}{M}} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

dove n è il numero del modo considerato,  $\rho$  è la densità, M è la massa totale della trave.

Lo spostamento verticale nel nodo di mezzeria (nodo n.6) risulta dipendente essenzialmente dal primo modo di vibrare; pertanto il suo valore risulta:

$$u_{z,6} = \frac{\sum_{j=1}^6 \phi_{1,6} P_j(\omega) \phi_{1,j}}{m_1 (\omega_1^2 - \omega^2 + i 2g \omega \omega_1)}$$

avendo indicato con  $\Phi_{1,j}$  il grado di libertà j-esimo del modo 1.

In particolare nei tre casi previsti, indicando con f la frequenza della forzante, si ha:

- FREQ1 - FREQ3 -

$$u_{z,6} = \frac{94.764 + 41.033 i}{(50^2 - f^2) + (0.02 f^2) i}$$

- FREQ2 -

$$u_{z,6} = \frac{23.691 (3 + 2 \cos 2f - i 2 \sin 2f)}{(50^2 - f^2) + i (0.02 f^2)}$$

I risultati relativi allo spostamento in mezzzeria della trave ottenuti con le formule teoriche e con Xfinest sono:

FREQUENZA (Hz)	Spostamento Uz nodo 6							
	Valori teorici (primo modo)		Xfinest 4.0					
			Freq1		Freq3		Freq1	Freq3
	Uz	Fase	Uz	fase	Uz	fase	%	%
0	0.0413	23.42°	0.0423	22.92°	0.0415	23.41	102.0	10??
30	0.0646	22.34°	0.0663	21.84°	0.0649	22.33	102.0	100.5
50	2.066	293.42°	2.0686	281.36°	2.027	281.85	100.1	98.1

FREQUENZA (Hz)	Spostamento Uz nodo 6				
	Valori teorici (primo modo)		Xfinest Freq2		
	Uz	Fase	Uz	fase	%
0	0.047	0.0°	0.0484	0.0°	103.0
30	0.0646	-22.34	0.0663	-23.99	102.6
50	1.565	233.4°	1.573	222.82	100.5

## PIASTRA APOGGIATA

## SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici:</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Stokey, <i>"Vibration of Systems Having Distributed Mass and Elasticity"</i>, Chap. 7, SHOCK AND VIBRATION HANDBOOK, C. M. Harris and C.E. Crede, Editors, McGraw-Hill, 1961.</li> <li>2. UAI/NASTRAN - <i>"DEMONSTRATION PROBLEM MANUAL"</i> - Universal Analytics, inc., rev. 01/85: Esempio n. 8 - "Frequency response of a 10x10 Plate (D80110)".</li> </ol>
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Analisi in frequenza
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	BEAM
<b>File:</b>	PIAFREQ1, PIAFREQ2

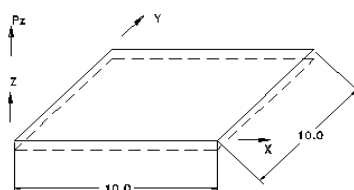
## DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Si vuole calcolare la risposta in frequenza della piastra descritta in figura, soggetta ad una pressione crescente con la frequenza e sinusoidalmente distribuita sulla superficie, in corrispondenza di alcuni valori di frequenza compresi tra 0 e 20 Hz. Il modello rappresenta solo un quarto di piastra ed i vincoli imposti prevedono una doppia simmetria in modo da cogliere i primi modi simmetrici. Dato che i carichi applicati stimolano soltanto il primo modo di vibrare della piastra, nell'analisi si considera solo tale modo. Tale scelta è resa possibile dal comando INCLUDE di Dynfinest. Verificare l'implementazione del modulo dinamico nel caso di elementi ISOSHELL per quanto riguarda l'analisi in frequenza. Si verificano i risultati di un'analisi in frequenza effettuata secondo il metodo della sovrapposizione modale. Con questo tipo di analisi, i gradi di libertà utilizzati nella soluzione sono i modi di vibrare della struttura. Tale approccio consente una soluzione semplice ed efficace, malgrado la necessità di procedere al calcolo dei modi di vibrazione e procedere alla trasformazione da coordinate modali a nodali.

## PIASTRA APOGGIATA : ANALISI IN FREQUENZA

DATI :

$E = 3.0e+7$   
 $\rho = 6.77858$   
 $\nu = 0.25$   
 Smorzamento relativo al critico = 0.0  
 Fattore di Taglio : PIAFREQ1 = 0.8333  
 PIAFREQ2 = 83.333



Condizione di Carico :

$$P_z(x,y,t) = F(t) \cdot \cos(\pi x/2a) \cdot \cos(\pi y/2b)$$

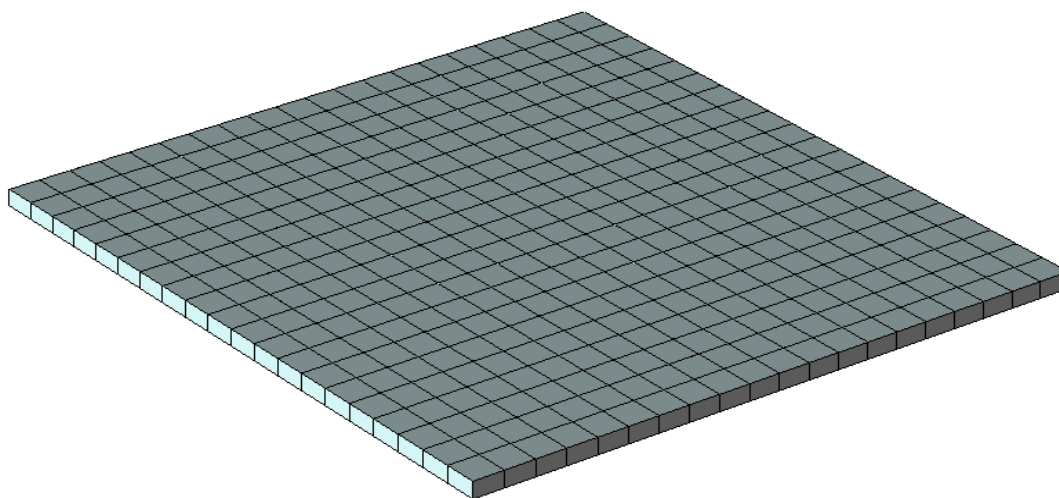
$$F(t) = 10.0 + 0.3 \cdot t$$

**MODELLO AD ELEMENTI FINITI**

Gli elementi utilizzati sono di tipo ISOSHELL. Caratteristiche principali del modello :

Esempio	n. Nodi	n. Elementi	n. Equazioni	Tipo elemento
PIAFREQ1, PIAFREQ2	121	100	726	ISOSHELL

Nella figura seguente è riportata la mesh relativa ad uno dei casi analizzati



**NOTE**

1. I risultati teorici e quelli calcolati in [2] sono relativi ad una piastra con deformabilità a taglio nulla; XFINEST prevede di default il fattore di taglio teorico (esempio PIAFREQ1: shea=0.83333), per confrontare i risultati si è forzato un fattore di taglio 100 volte più grande rispetto al valore teorico (esempio PIAFREQ2).
2. La pressione è stata schematizzata con forze applicate ai nodi del reticolo del modello ottenute integrando la pressione sull'area di influenza; il coefficiente F(f) è stato introdotto come input al modulo al programma in forma di tabella associata alla forzante (file di estensione .TAB).

**RISULTATI**

I valori teorici sono tratti da [1]. Il valore della frequenza del primo modo è espresso dalla relazione:

$$f_1 = \sqrt{\frac{Dg}{rta^4} \frac{19,74}{2p}} = 10 \text{ Hz} \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad \frac{b}{a} = 1$$

Lo spostamento verticale nel nodo centrale (nodo n.1) risulta dipendente essenzialmente dal primo modo di vibrare; pertanto il suo valore risulta (rif. [2]):

$$u_z(f) = \frac{F(f)}{(2p)^2 r t (f_1^2 - f^2)}$$

La frequenza propria calcolata con Xfinest è pari a 9.68 Hz per il modello PIAFREQ1 e a 9.943 Hz per il modello PIAFREQ2.

Nella tabella seguente si riportano i risultati relativi allo spostamento al centro della piastra (nodo n.1) ottenuti con la formula teorica, con UAI/NASTRAN (rif.[2]) e con Xfinest (esempi PIAFREQ1, PIAFREQ2). Dai diagrammi di questi valori si può notare come le differenze tra i risultati si riducano passando da PIAFREQ1 a PIAFREQ2 (deformabilità a taglio pressoché nulla).

FREQUENZA (Hz)	Spostamento Uz nodo 1 (parte reale)			
	Valore Teorico	NASTRAN	Xfinest	
			PIAFREQ1	PIAFREQ2
	Uz	Uz	Uz	Uz
0	1.868	1.874	1.980	1.874
5	2.865		3.104	2.885
6	3.445		3.791	3.479
7	4.433		5.016	4.497
8	6.436	6.49	7.730	6.591
9	12.489	12.69	0.042	13.175
10	infinito	824.92	-38.780	-212.08
11	-11.833	-11.67	-9.069	-11.135
12	-5.775		-5.027	-5.584
13	-3.764		-3.430	-3.673
14	-2.764		-2.579	-2.709
15	-2.167		-2.051	-2.13
17	-1.493		-1.436	-1.472
20	-0.997		-0.970	-0.985



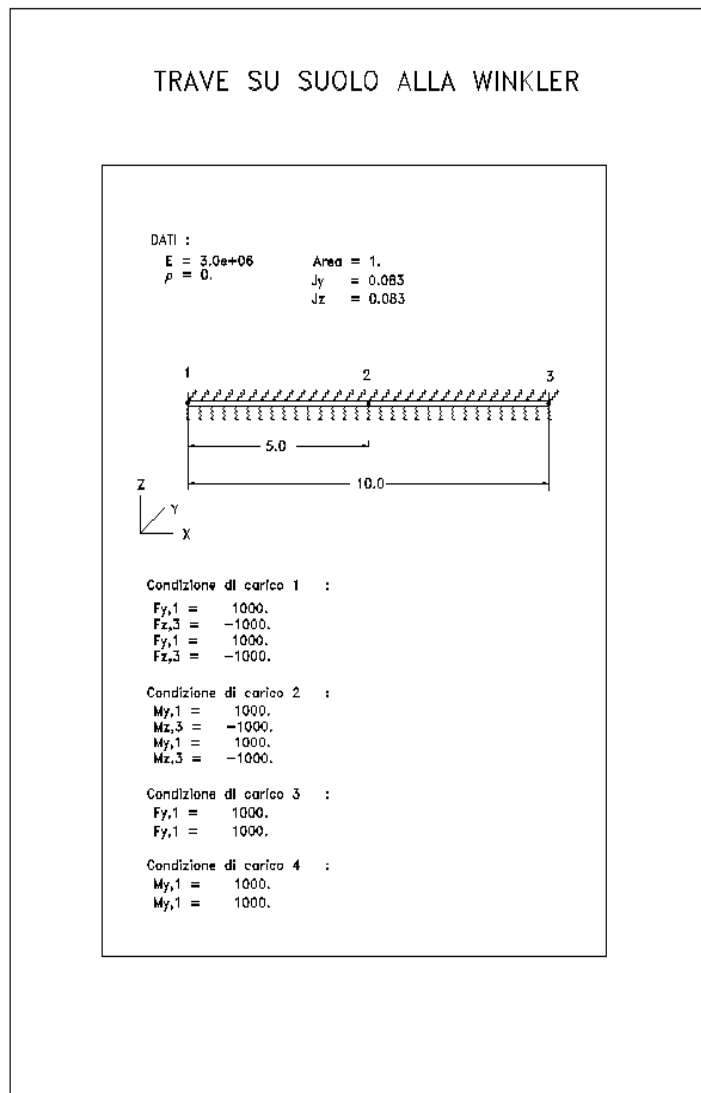
## TRAVE SU SUOLO ELASTICO ALLA WINKLER

### SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici:</b>	M.Hetenyi, "Beam on Elastic Foundation", The University of the Michigan Press, 1958.
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Elastica lineare
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	BEAM
<b>File:</b>	BEAM12A

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Si vuole analizzare una trave semplicemente appoggiata su un terreno alla Winkler e soggetta a forze e coppie nodali applicati alle estremità. Verificare l'implementazione dell'elemento BEAM su suolo elastico alla Winkler.



**MODELLO AD ELEMENTI FINITI**

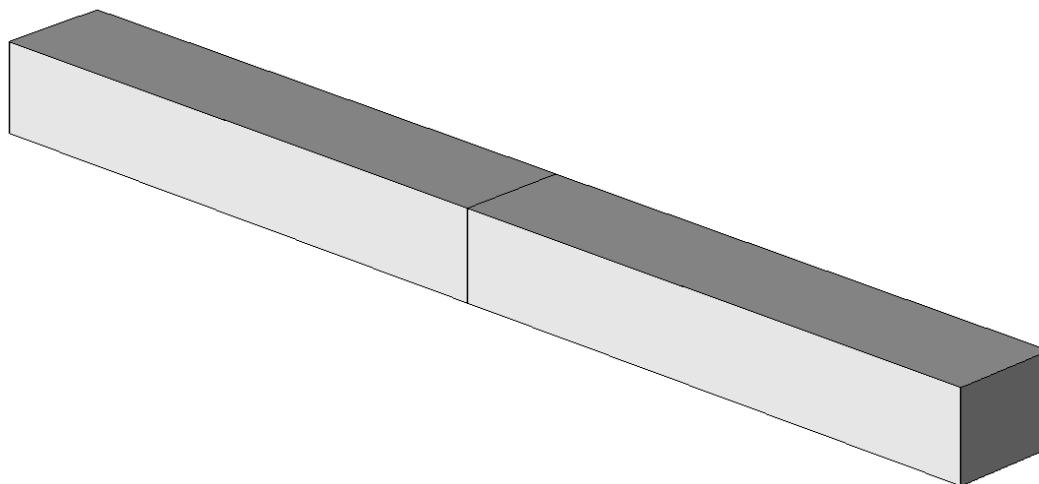
Gli elementi utilizzati sono di tipo BEAM. Il modello è simmetrico dal punto di vista della geometria e i soli vincoli attivi sono quelli relativi agli spostamenti lungo l'asse degli elementi e alle rotazioni attorno a tale asse.

Il nodo centrale consente di valutare spostamenti e sollecitazioni al centro della trave. Le condizioni di carico considerate sono di tipo simmetrico e antisimmetrico.

Caratteristiche principali del modello :

Esempio	n. Nodi	n. Elementi	n. Equazioni	Tipo elemento
BEAM12A	3	2	18	BEAM

Nella figura seguente è riportata la mesh relativa ad uno dei casi analizzati

**RISULTATI**

Come si può verificare nella tabella seguente i risultati del modello sono in ottimo accordo con i valori teorici.

Caso	Posizione	Spostamento modello	Spostamento teorico	Momento modello	Momento teorico
1	Estremo A mezzeria	-0.26193234	-0.26193236	0.	0.
		-0.16536985	-0.16536986	2291.084	2281.084
2	Estremo A Rotazione A	0.03112923	0.03112923	1000.000	1000.000
		0.01897127	0.01897127	903.628	903.628
3	Estremo A Estremo B	-0.43568406	-0.43568407	0.	0.
		0.17375171	0.17375171	0.	0.
4	Estremo A Estremo B	0.07981547	0.079815475	0.	1000.000
		-0.04868624	-0.04868624	0.	0.

## TRAVE INCASTRATA SU ELEMENTI QF46

### SOMMARIO

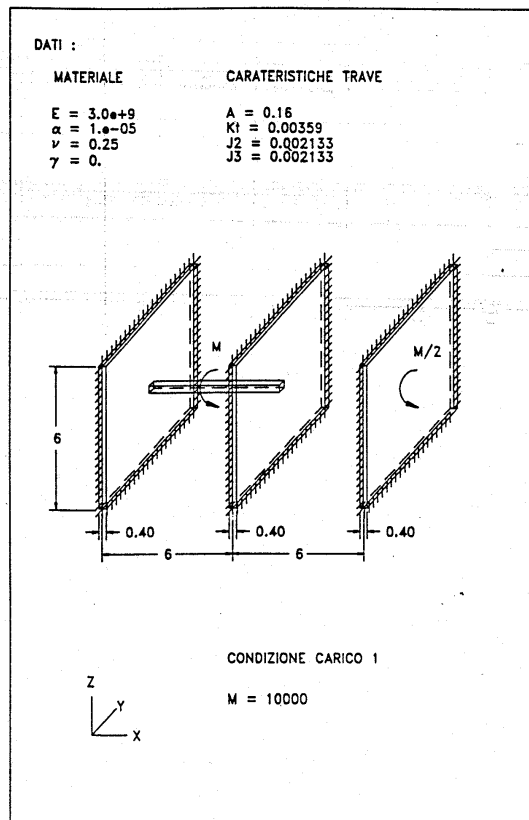
<b>Riferimenti Bibliografici:</b>	
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Elastica lineare
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	BEAM, QF46 e ISOSHELL.
<b>File:</b>	QF46-12A

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Una caratteristica peculiare dell'elemento QF46 è quella di considerare come grado di libertà attivo la rotazione dei nodi di incidenza attorno all'asse ortogonale al piano dell'elemento (ROT1). In questo, l'elemento QF46 si discosta dall'elemento ISOSHELL che non è dotato di questa importante possibilità. L'elemento ISOSHELL infatti non è in grado di collegare alcuna rigidità alla componente di rotazione ROT1 sopra definita. Tale componente di spostamento deve pertanto essere opportunamente vincolata (per evitare labilità) e in ogni caso non può essere causa di uno stato di sforzo o deformazione all'interno dell'elemento. L'elemento QF46 consente quindi di eliminare i problemi di labilità sopra esposti e di valutare lo stato di deformazione e di sforzo generati dalle rotazioni ROT1.

Un caso tipico è quello descritto in questo test, dove una trave soggetta a una coppia concentrata in mezzzeria va ad "incastrarsi" su 2 pareti laterali schematizzate con elementi tipo QF46. Ciò che è possibile valutare in questo modello è la rotazione dell'asta (tenendo conto della deformabilità delle pareti di sostegno) e lo stato di sforzo della parete nella zona di appoggio della trave.

### TEST ELEMENTI QF46

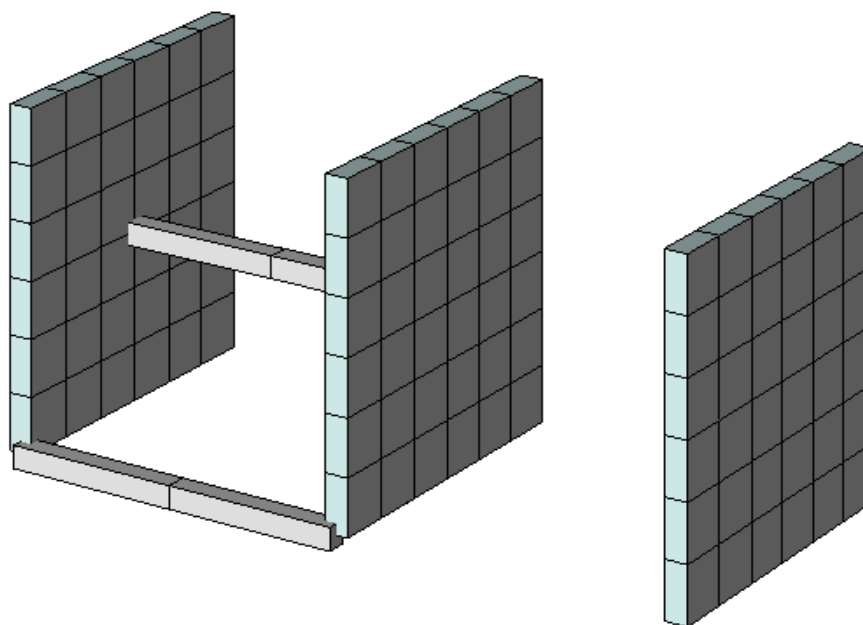


### MODELLO AD ELEMENTI FINITI

Gli elementi utilizzati sono di tipo BEAM, QF46 e ISOSHELL. Il modello è realizzato senza tener conto di eventuali simmetrie. Le pareti di appoggio della trave sono state schematizzate con una mesh piuttosto povera al fine di verificare i risultati in una situazione prossima a quelle che si possono verificare nell'uso corrente del programma. Per verificare lo stato di sforzo negli elementi QF46, si è inserita una terza parete, con caratteristiche identiche alle precedenti, ma schematizzata con elementi ISOSHELL e soggetta a forze concentrate in grado di simulare una coppia di valore pari alla metà di quella agente sull'asta. Tutte le pareti sono considerate incastrate lungo il bordo esterno. Infine, per verificare i risultati relativi alla trave soggetta a torsione, si è inserita una trave di riferimento tra nodi vincolati a incastro e soggetta alla stessa coppia della trave principale. Caratteristiche principali del modello :

Esempio	n. Nodi	n. Elementi	n. Equazioni	Tipo elemento
QF46-12	439	364	2628	BEAM, QF46, ISOSHELL

Nella figura seguente è riportata la mesh relativa ad uno dei casi analizzati



**NOTE**

Una nota particolare va fatta sulla schematizzazione della parete di riferimento. Non essendo possibile applicare direttamente una coppia concentrata al nodo centrale, questa condizione di carico è stata schematizzata tramite carichi concentrati applicati nell'intorno del nodo centrale. Al fine di simulare in modo sufficientemente approssimato questa coppia concentrata, la mesh della parete è stata infittita dimezzando il passo della maglia.

**RISULTATI**

L'analisi dei risultati è basata sul confronto tra lo stato di sforzo e le componenti di spostamento delle pareti schematizzate con gli elementi QF46 e le componenti di sforzo e spostamento ottenuti con il modello di riferimento realizzato con elementi ISOSHELL.

Anche se non è possibile un confronto "diretto" tra i risultati dei due modelli (si tratta di due diverse schematizzazioni), è però possibile valutare lo stato di sollecitazione tramite bande di isosforzo e confrontare questi risultati. Come si può vedere nella figura 3, i risultati ottenuti con le 2 schematizzazioni sono in buon accordo.

Anche per gli spostamenti è possibile un confronto qualitativo tramite il plottaggio dei vettori di spostamento. Come si può notare dalla figura 2, i valori degli spostamenti calcolati con gli elementi QF46 sono opposti a quelli calcolati con gli elementi ISOSHELL. Il problema è legato alle funzioni di interpolazione degli spostamenti per gli elementi QF46; tali funzioni sono di tipo non lineare e utilizzano sia le traslazioni che le rotazioni dei nodi dell'elemento. Il risultato è che il campo di spostamento all'interno dell'elemento non è lineare e deve tener conto sia dei valori di spostamento che di quelli delle rotazioni dei nodi. In questo particolare problema le rotazioni assumono una importanza predominante nei confronti degli spostamenti e pertanto l'errore in termini di traslazione è maggiore. Gli spostamenti all'interno dell'elemento hanno un andamento qualitativamente corretto ma con errore che aumenta in corrispondenza dei nodi fino ad invertire il verso del vettore spostamento nell'intorno di questi punti.

## TRAVE CONTINUA CON SVINCOLI ELASTICI

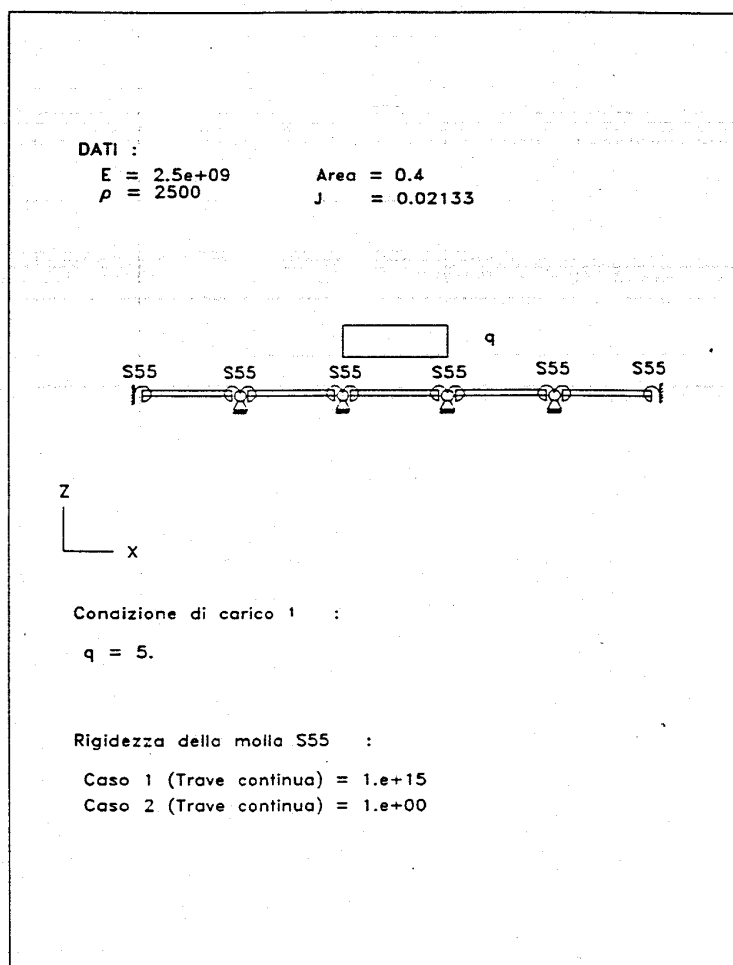
### SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici:</b>	
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Elastica lineare
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	BEAM
<b>File:</b>	CJOINT3

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Si vogliono calcolare le azioni interne in prossimità degli appoggi di una trave continua dotata di svincoli elasticamente cedevoli in due situazioni limite : trave continua e serie di travi semplicemente appoggiate. La condizione di carico esaminata è quella di un carico uniformemente distribuito. I dati geometrici e meccanici del problema sono descritti in figura. Possiamo in questo modo verificare l'implementazione degli elementi CJOINT in un caso applicativo pratico diretto a simulare il comportamento di una trave continua con svincoli elastici.

## TRAVE CONTINUA CON SVINCOLI ELASTICI

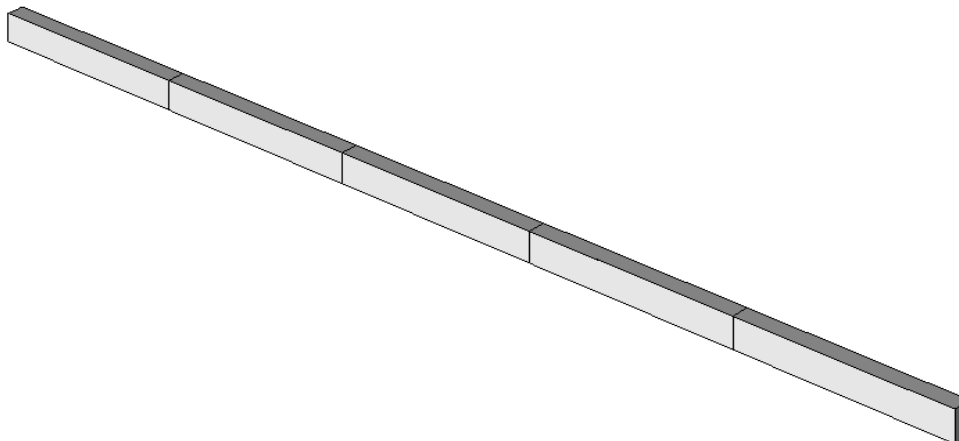


**MODELLO AD ELEMENTI FINITI**

Gli elementi utilizzati sono di tipo BEAM e CJOINT. I dati del modello sono riportati in tabella :

Esempio	n. Nodi	n. Elementi	n. Equazioni	Tipo elemento
CJOINT3	18	15	-	CJOINT

Nella figura seguente è riportata la mesh relativa ad uno dei casi analizzati

**NOTE**

Per la schematizzazione del problema è necessario introdurre dei nodi aggiuntivi per simulare i collegamenti elastici tra l'estremità della trave, l'elemento CJOINT e il nodo di appoggio. In particolare, occorre prestare attenzione alla presenza di nodi slave. Infatti, nell'inserimento degli elementi cjoint, i gradi di libertà non collegati da costanti elastiche sono collegati rigidamente tramite link. È pertanto necessario far sì che i nodi vincolati risultino essere nodi master (i nodi slave non possono essere vincolati).

**RISULTATI**

I valori di riferimento sono calcolati facendo uso del programma. Risultati dei test:

ELEMENTO	END	SVINCOLO ELASTICO S55=1.e+15		TRAVE CONTINUA	
		T3	M2	T3	M2
501	A	-.5682	.9470	-.5682	.9470
	B	.5682	1.894	.5682	1.894
502	A	1.705	-1.894	1.705	-1.894
	B	-1.705	-6.629	-1.705	-6.629
503	A	-12.50	6.629	-12.50	6.629
	B	-12.50	-6.629	-12.50	-6.629
504	A	-1.705	6.629	-1.705	6.629
	B	1.705	1.894	1.705	1.894
505	A	.5682	-1.894	.5682	-1.894
	B	-.5682	-.9470	-.5682	-.9470

		SVINCOLO ELASTICO S55=1.e+00		TRAVE CONTINUA CON SVINCOLI	
ELEMENTO	END	T3	M2	T3	M2
501	A	-.3816E-15	.2982E-22	0.	0.
	B	.3816E-15	.1908E-14	0.	0.
502	A	.4884E-07	-.1908E-14	0.	0.
	B	-.4884E-07	-.2442E-06	0.	0.
503	A	-12.50	.2442E-06	-12.50	0.
	B	-12.50	-.2442E-06	-12.50	0.
504	A	-.4884E-07	.2442E-06	0.	0.
	B	.4884E-07	.1908E-14	0.	0.
505	A	.3816E-15	-.1908E-14	0.	0.
	B	-.3816E-15	-.2982E-22	0.	0.



## ANALISI IN GRANDI SPOSTAMENTI D'UNA MENSOLA INFLESSA

### SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici:</b>	
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Non lineare per geometria
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	BEAM
<b>File:</b>	Cant-SmallDisp-01_Elem, Cant- SmallDisp -04_Elem, Cant- SmallDisp -08_Elem

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Trave a mensola in flessa nel piano verticale da un carico applicato in punta.

I dati geometrici e meccanici del problema sono descritti in figura.

Verificare che la formulazione in grandi spostamenti dell'elemento BEAM dia gli stessi risultati della formulazione 'lineare'.

### MODELLO AD ELEMENTI FINITI

Gli elementi utilizzati sono di tipo BEAM.

I dati dei modelli sono riportati in tabella:

Esempio	n. Nodi	n. Elementi	n. Equazioni	Tipo elemento
Cant- SmallDisp -01_Elem	2	1	12	BEAM
Cant- SmallDisp -04_Elem	5	4	30	BEAM
Cant- SmallDisp -08_Elem	9	8	54	BEAM

### RISULTATI

I risultati ottenuti sono in accordo con la soluzione teorica di seguito indicata:

$$v_{tip} = \frac{PL^3}{3EI} = -2.675 \times 10^{-3}$$

$$\theta_{tip} = \frac{PL^2}{2EI} = -8.026 \times 10^{-4}$$

## ANALISI IN GRANDI SPOSTAMENTI D'UNA MENSOLA SOGGETTA A DUE FORZE CONCENTRATE (MODELLO 2D)

### SOMMARIO

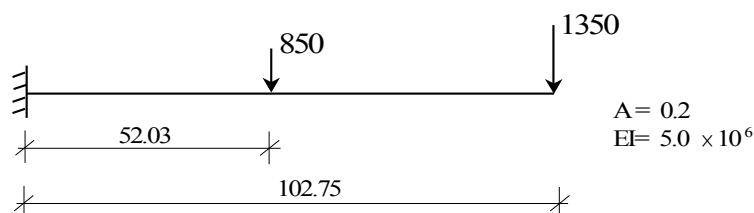
<b>Riferimenti Bibliografici:</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Cardona, A. and Geradin, M. [1988] "A beam element nonlinear theory with finite rotations," <i>International Journal for Numerical Methods in Engineering</i>, Vol. 26, pp. 2403-2438.</li> <li>2. Crivelli, L.A. and Felippa, C.A. [1993] "A three-dimensional nonlinear Timoshenko beam element based on core-congruent formulation," <i>International Journal for Numerical Methods in Engineering</i>, Vol. 36, pp. 3647-3763.</li> <li>3. Ebner, A.M. and Ucciferro, J.J. [1972] "A theoretical and numerical comparison of elastic nonlinear finite element methods," <i>Computers &amp; Structures</i>, Vol. 2, pp. 1043-1061.</li> </ol>
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Non lineare per geometria
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	BEAM
<b>File:</b>	Cant-TwoLoads-02_Elem, Cant-TwoLoads-04_Elem, Cant-TwoLoads-08_Elem

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Quest'esempio consiste di una trave a mensola soggetta a due carichi verticali, uno applicato all'estremo libero e l'altro circa in mezzeria, come indicato nella figura sottostante.

Questo caso è stato analizzato da diversi autori [e.g. Cardona and Geradin, 1988; Crivelli and Felippa, 1993] ed è inoltre disponibile una soluzione teorica [Ebner and Ucciferro, 1972].

I dati geometrici e meccanici del problema sono descritti in figura.



### MODELLO AD ELEMENTI FINITI

Gli elementi utilizzati sono di tipo BEAM.

I dati dei modelli sono riportati in tabella:

Esempio	n. Nodi	n. Elementi	n. Equazioni	Tipo elemento
Cant-TwoLoads-02_Elem	3	2	18	BEAM
Cant-TwoLoads-04_Elem	5	4	30	BEAM
Cant-TwoLoads-08_Elem	9	8	54	BEAM

### NOTE

Il confronto dei risultati ottenuti mostra l'importanza della 'discretizzazione' adottata nel modello ad elementi finiti per avere dei valori corretti in campo nonlineare.

**RISULTATI**

In tabella è riportato il confronto tra i risultati ottenuti con XFINEST e la soluzione esatta.

Formulazione	Spostamenti	Numero di elementi		
		2	4	8
Analitici (esatti)	Long		-30.75	
	Trasv		-66.96	
Crivelli and Felippa [1993]	Long	-5.72%	-1.59%	-0.42%
	Trasv	-1.49%	-0.49%	-0.13%
X <sub>FINEST</sub>	Long	+0.94%	-0.07%	-0.05%
	Trasv	+3.61%	+0.77%	+0.18%

## ANALISI IN GRANDI SPOSTAMENTI D'UNA MENSOLA SOGGETTA A UN MOMENTO IN PUNTA (MODELLO 2D)

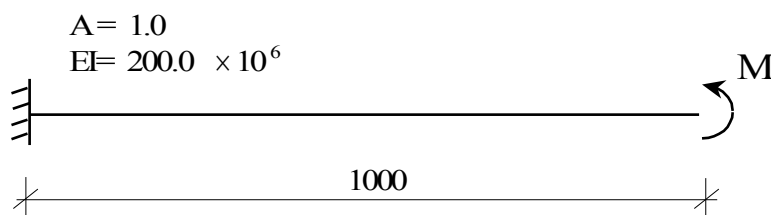
### SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici:</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Bathe, K-J. and Bolourchi, S. [1979] "Large displacement analysis of three-dimensional beam structures," <i>International Journal for Numerical Methods in Engineering</i>, Vol. 14, pp. 961-986.</li> <li>2. Borri, M. and Botasso, C. [1994] "An intrinsic beam model based on a helicoidal approximation – Part I: formulation," <i>International Journal for Numerical Methods in Engineering</i>, Vol. 37, pp. 2267-2289.</li> <li>3. Simo, J.C. and Vu-Quoc, L. [1986] "A three-dimensional finite strain rod model. Part II –Computational Aspects," <i>Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering</i>, Vol. 58, pp. 79-116.</li> <li>4. Crivelli, L.A. and Felippa, C.A. [1993] "A three-dimensional nonlinear Timoshenko beam element based on core-congruent formulation," <i>International Journal for Numerical Methods in Engineering</i>, Vol. 36, pp. 3647-3763.</li> </ol>
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Non lineare per geometria
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	BEAM
<b>File:</b>	Cant-TipMoment-01_Elem, Cant-TipMoment-02_Elem, Cant-TipMoment-04_Elem, Cant-TipMoment-08_Elem, Cant-TipMoment-16_Elem

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Questo esempio é uno dei pochi problemi di BEAM nonlineare per i quali è disponibile una soluzione analitica esatta

L'esempio considera una trave a mensola rettilinea soggetta all'estremo libero a un momento flettente M come indicato in figura.



La soluzione esatta prevede che la deformata sia un 'arco' di cerchio di raggio  $r = EI/M$  e che la rotazione e lo spostamento verticale dell'estremo libero siano dati dalle seguenti formule:

$$\theta_{tip} = \frac{ML}{EI} \quad ; \quad v_{tip} = \frac{EI}{M} (1 - \cos \theta_{tip})$$

Per controllare l'accuratezza dell'algoritmo implementato, si sono considerate due condizioni di carico. Nella prima l'estremità della mensola viene fatta ruotare di un angolo pari a  $90^\circ$  applicando un momento flettente  $M = \pi \times 10^5$ . Nella seconda l'estremità descrive una circonferenza completa e poi ancora un quarto (si ottiene pertanto una rotazione di  $450^\circ$  dell'estremità libera) mediante applicazione di un momento  $M = 5\pi \times 10^5$ .

## MODELLO AD ELEMENTI FINITI

Gli elementi utilizzati sono di tipo BEAM.  
I dati dei modelli sono riportati in tabella:

Esempio	n. Nodi	n. Elementi	n. Equazioni	Tipo elemento
Cant-TwoLoads-01 Elem	2	1	12	BEAM
Cant-TwoLoads-02 Elem	3	2	18	BEAM
Cant-TwoLoads-04 Elem	5	4	30	BEAM
Cant-TwoLoads-08 Elem	9	8	54	BEAM
Cant-TwoLoads-16 Elem	17	16	102	BEAM

## NOTE

Questo problema è stato studiato da molti ricercatori [tra gli altri: Bathe and Bolourchi, 1979; Borri and Botasso, 1994; Simo and Vu-Quoc, 1986; Crivelli and Felippa, 1993] perché è ideale per controllare la stabilità numerica della formulazione adottata per l'elemento trave: la mensola è 'piegata' due volte su se stessa e se si utilizza una mesh costituita da quattro elementi ciascun elemento è deformato come una mezza circonferenza, con una rotazione relativa tra i due nodi d'estremità pari a  $180^\circ$ . Quest'analisi è portata a termine senza particolari difficoltà da Xfinest, ottenendo i corretti valori sia per la rotazione ( $720^\circ$ ) che per gli spostamenti verticale ed orizzontale dell'estremo libero in corrispondenza di un momento  $M=8\pi \times 10^5$  (i risultati di questa analisi sono riportati nell'esempio Cant-TipMoment-04\_Elem).

## RISULTATI

Nella tabella sottostante sono riportati i risultati ottenuti con differenti configurazioni della mesh (diverso numero di elementi), dai quali si evince l'abilità del programma di ottenere risultati accurati con pochi elementi anche in condizioni di grande deformabilità.

Rotazione estremità	Formulazione	spostamenti	Numero di elementi				
			1	2	4	8	16
$\theta=90^\circ$	Analytic (exact)	$h_{tip}$			-363.38		
		$v_{tip}$			636.62		
	XFINEST	$h_{tip}$	-19.4%	-4.6%	-1.1%	-0.3%	-0.1%
		$v_{tip}$	11.1%	2.6%	0.6%	0.2%	0.04%
$\theta=360^\circ+90^\circ$	Analytic (exact)	$h_{tip}$			-872.67		
		$v_{tip}$			127.32		
	XFINEST	$h_{tip}$	95.6%	-16.4%	-2.6%	-0.6%	-0.2%
		$v_{tip}$	-455.4%	112.5%	18.1%	4.1%	1.0%
$\theta=720^\circ$	Analytic (exact)	$h_{tip}$			-1000.		
		$v_{tip}$			0.		
	XFINEST	$h_{tip}$			0%		
		$v_{tip}$			0%		

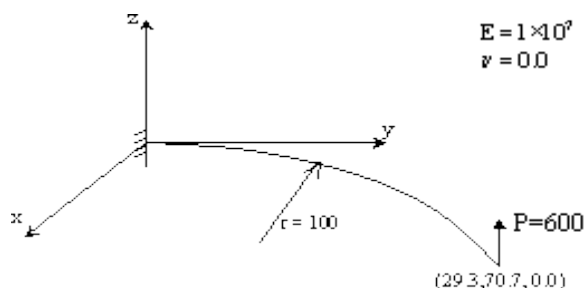
## ANALISI IN GRANDI SPOSTAMENTI D'UNA TRAVE CURVA SOGGETTA A UNA FORZA IN PUNTA (MODELLO 3D)

### SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici:</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Bathe, K-J. and Bolourchi, S. [1979] "Large displacement analysis of three-dimensional beam structures," <i>International Journal for Numerical Methods in Engineering</i>, Vol. 14, pp. 961-986.</li> <li>2. Simo, J.C. and Vu-Quoc, L. [1986] "A three-dimensional finite strain rod model. Part II –Computational Aspects," <i>Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering</i>, Vol. 58, pp. 79-116.</li> <li>3. Cardona, A. and Geradin, M. [1988] "A beam element nonlinear theory with finite rotations," <i>International Journal for Numerical Methods in Engineering</i>, Vol. 26, pp. 2403-2438.</li> <li>4. Dvorkin, E. N., Onate, E. and Oliver, J. [1988] "On the nonlinear formulation for curved Timoshenko beam elements considering large displacement/rotation increments," <i>International Journal for Numerical Methods in Engineering</i>, Vol. 26, pp. 1597-1613.</li> <li>5. Surana, K.S. and Sorensen, R.M. [1989] "Geometrically nonlinear formulation for three dimensional curved beam elements with large rotations," <i>International Journal for Numerical Methods in Engineering</i>, Vol. 28, pp. 43-73.</li> <li>6. Crisfield, M.A. [1990] "A consistent co-rotational formulation for non-linear, three dimensional, beam elements," <i>Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering</i>, Vol. 81, pp. 131-150.</li> <li>7. Sandhu, J.S, Stevens, K.A. and Davies, G.O.A. [1990] "A 3D, co-rotational, curved and twisted beam element," <i>Computers &amp; Structures</i>, Vol. 35, pp. 69-79.</li> </ol>
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Non lineare per geometria
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	BEAM
<b>File:</b>	Cant-45bend-08_Elem

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Il modello è costituito da una mensola curva che giace in un piano orizzontale ed è soggetta ad un carico concentrato normale al piano, applicato all'estremità libera, come mostrato in figura. La curva è un arco di cerchio (angolo al centro  $45^\circ$ ) di raggio  $r = 100$  e la sezione trasversale della BEAM è un quadrato di lato unitario. Il materiale ha modulo elastico  $E = 10^7$  e un coefficiente di Poisson nullo.



### MODELLO AD ELEMENTI FINITI

La mesh è costituita da otto elementi BEAM rettilinei e il carico applicato vale  $P=600$ .

Esempio	n. Nodi	n. Elementi	n. Equazioni	Tipo elemento
Cant-45bend-08_Elem	9	8	54	BEAM

### NOTE

La mancanza di soluzioni analitiche esatte per problemi di nonlinearità geometriche con spostamenti non limitati ad un piano, rende più difficile controllare l'accuratezza di un dato modello a elementi finiti. Comunque l'efficienza dell'algoritmo può ancora essere verificata effettuando un confronto con i risultati ottenuti da altri ricercatori, pubblicati su riviste specialistiche.

In quest'ambito, l'esempio più utilizzato è senz'altro quello dell'*analisi in grandi spostamenti di una mensola curva inflessa*, introdotto da Bathe e Bolourchi [1979] nel loro lavoro pionieristico del 1979. Quest'esempio è stato studiato da un gran numero di ricercatori (in pratica da chiunque abbia lavorato nel campo della modellazione di elementi beam tridimensionali nonlineari). Di seguito saranno considerati i risultati ottenuti solo da alcuni ricercatori [Bathe e Bolourchi, 1979; Simo e Vu-Quoc, 1986; Cardona e Geradin, 1988; Dvorkin *et al.*, 1988; Surana e Sorem, 1989; Crisfield, 1990; Sandhu *et al.*, 1990].

### RISULTATI

I risultati mostrati nella tabella sottostante sono praticamente identici a quelli ottenuti dai ricercatori citati, il che conferma, non essendo disponibile una soluzione analitica esatta, l'accuratezza dell'attuale formulazione

Si noti che le caratteristiche geometriche del modello (il fatto che la mensola sia un arco di cerchio) fanno sì che non si possa utilizzare un minor numero di elementi.

Autori	Spostamenti		
	$\Delta_x$	$\Delta_y$	$\Delta_z$
Bathe and Bolourchi [1979]	-13.4	-23.5	53.4
Simo and Vu-Quoc [1986]	-13.5	-23.5	53.4
Cardona and Geradin [1988]	-13.8	-23.7	53.5
Dvorkin <i>et al.</i> [1988]	-13.6	-23.5	53.3
Surana and Sorem [1989]	-13.3	-23.0	53.0
Crisfield [1990]	-13.7	-23.9	53.7
Sandhu <i>et al.</i> [1990]	-13.4	-23.4	53.3
XFINEST	-13.6	-23.9	53.5

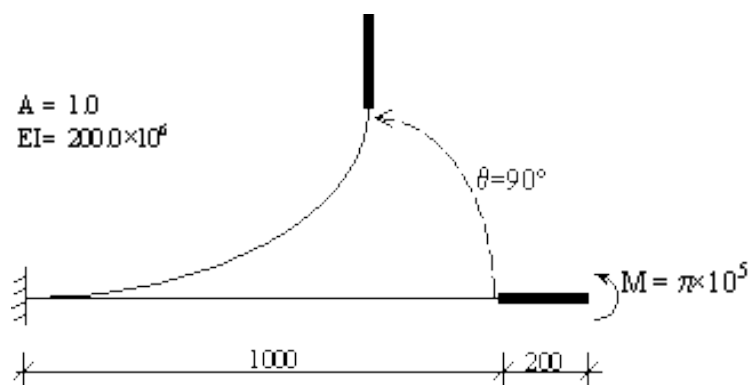
## ANALISI IN GRANDI SPOSTAMENTI D'UNA TRAVE DOTATA DI UN OFFSET (MODELLO 2D)

### SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici:</b>	
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Non lineare per geometria
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	BEAM
<b>File:</b>	Cant-Offset-x-01_Elem, Cant-Offset-y-01_Elem, Cant-Offset-z-01_Elem, Cant-Offset-xyz-01_Elem, Cant-RigidLink-01_Elem

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Il modello è costituito da una mensola dotata di un tratto rigido all'estremità libera e soggetta a un momento flettente che provoca una rotazione di  $90^\circ$  della sezione di estremità.



### MODELLO AD ELEMENTI FINITI

La mesh è costituita da un unico elemento BEAM rettilineo di lunghezza complessiva 1200 dotato di un tratto rigido pari a 200 come indicato in figura (modello Cant-Offset-x-01\_Elem).

Gli esempi Cant-Offset-y-01\_Elem, Cant-Offset-z-01\_Elem, Cant-Offset-xyz-01\_Elem si differenziano per la 'direzione' dell'offset: nel primo il tratto rigido è parallelo all'asse Y, nel secondo all'asse Z mentre nel terzo di considerano contemporaneamente tutti e tre gli offset<sup>1</sup>.

Il secondo nodo dell'elemento (estremo libero) viene vincolato in modo che possa spostarsi solo nel piano XY (i gradi di libertà attivi sono gli spostamenti X e Y e la rotazione Z).<sup>2</sup>

<sup>1</sup> La lunghezza del tratto elastico rimane sempre la stessa in tutti i modelli, ovvero  $L_{elastica} = 1000$

<sup>2</sup> Se il nodo viene lasciato libero di spostarsi fuori dal piano XY, allora il modello non riesce a raggiungere la convergenza al 100% del carico applicato: ciò è dovuto al fatto che il modello si instabilizza per flessione-torsione prima che la sezione libera possa ruotare di  $90^\circ$ .



**NOTE**

Il momento applicato alla mensola provoca una rotazione di 90° della sezione di estremità: ci si aspetta pertanto che il tratto rigido si disponga perpendicolarmente all'indeformata. Gli spostamenti orizzontale e verticale delle sezione di estremità si ottengono aggiungendo la lunghezza dell'offset agli spostamenti della sezione di estremità del tratto deformabile.

**RISULTATI**

I valori teorici degli spostamenti orizzontale e verticale nella sezione alla fine del tratto deformabile sono rispettivamente  $\Delta_h = -292.9$  e  $\Delta_v = 707.1$  (ottenuti considerando un elemento BEAM di lunghezza 1000 sottoposto al momento sopra indicato)

Alla fine del tratto rigido XFINEST fornisce, utilizzando la formulazione 'nonlineare' degli offset, uno spostamento orizzontale  $\Delta_h = -492.9$  e uno verticale  $\Delta_v = 907.1$ , in accordo con i valori teorici. (l'utilizzo di una formulazione 'lineare' per gli offset porta ai seguenti valori scorretti  $\Delta_h = -292.9$  and  $\Delta_v = 1021.3$  – si veda il modello Cant-RigidLink-01\_Elem in cui il tratto rigido viene rappresentato mediante un LINK di tipo RIGID per il quale non è attualmente implemento il comportamento 'nonlineare').

La tabella riassume gli spostamenti ottenuti nei quattro casi di offset considerati (tutti in accordo con i valori teorici).

modello	Spostamento Y	Spostamento Z
X	-492.9	907.1
Y	-492.9	507.1
Z	-292.9	707.1
XYZ	-692.9	707.1

## ANALISI IN GRANDI SPOSTAMENTI DI UN TELAIO CON ELEMENTI DOTATI DI SVINCOLI INTERNI (MODELLO 3D)

### SOMMARIO

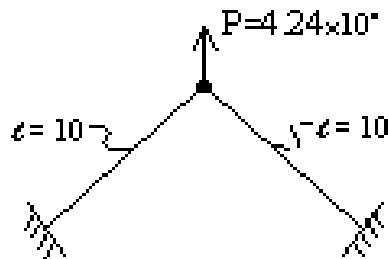
<b>Riferimenti Bibliografici:</b>	
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Non lineare per geometria
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	BEAM
<b>File:</b>	Hinged_Frame-ERC, Hinged_Frame-MPC

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Il telaio spaziale è costituito da due travi perpendicolari tra di loro, incastrate al un estremo e incernierate tra di loro, soggette a una forza normale al piano in cui giacciono le due travi.

Verificare il comportamento dell'elemento BEAM in presenza di svincoli (ERC – End Release Code).

$$\begin{aligned} A &= 1.976 \times 10^{-3} \\ I &= 6.064 \times 10^{-8} \\ E &= 2.1 \times 10^7 \end{aligned}$$



### MODELLO AD ELEMENTI FINITI

La mesh è costituita da due elementi BEAM rettilinei.

La cerniera viene rappresentata nel primo modello introducendo al secondo estremo di un elemento uno svincolo interno (ERC=000111) che libera le rotazioni (cerniera sferica), mentre nel secondo modello viene ottenuta definendo due nodi coincidenti nel punto comune alle due travi e inserendo degli MPC (Multi Point Constraint) che impongono l'uguaglianza degli spostamenti (traslazioni) dei due nodi (mentre le rotazioni sono libere).

### RISULTATI

Entrambe le formulazioni del problema portano agli stessi risultati numerici, garantendo la correttezza della formulazione nonlineare degli ERC.

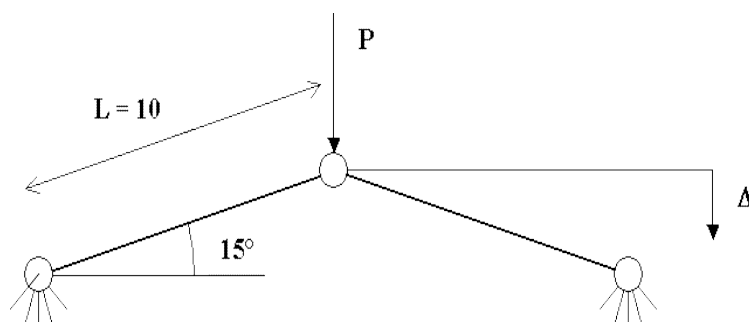
## ANALISI IN GRANDI SPOSTAMENTI DI UN ARCO RIBASSATO (MODELLO TRUSS 2D)

### SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici:</b>	
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Non lineare per geometria
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	TRUSS
<b>File:</b>	Hinged_Frame-ERC, Hinged_Frame-MPC

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Il modello è costituito da un arco ribassato la cui geometria è descritta nella figura seguente. Verificare la formulazione in grandi spostamenti dell'elemento TRUSS.



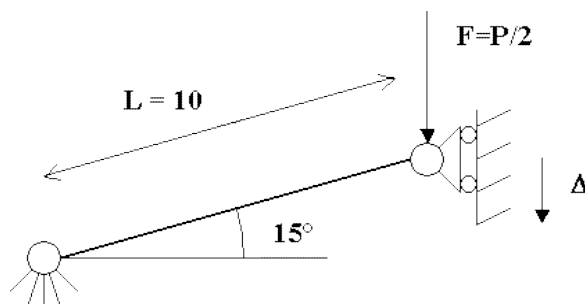
L'arco è sottoposto a una forza verticale **P** diretta verso il basso, che provoca un abbassamento del nodo di sommità indicato con  $\Delta$ .

Si è adottato un modulo elastico **E=2.100.000** e un'area **A=1.0**.

### MODELLO AD ELEMENTI FINITI

La mesh è costituita da un unico elemento TRUSS vincolato a terra con una cerniera a un estremo e con un carrello in corrispondenza del piano di simmetria.

Si è applicato un carico **F** corrispondente a metà del carico **P** applicato al modello 'completo'.

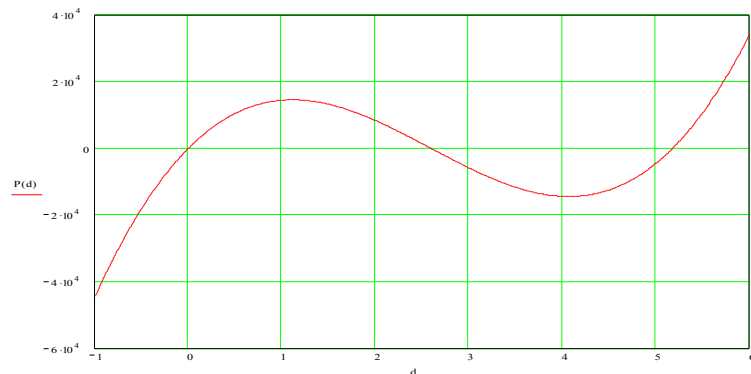


**NOTE**

La soluzione analitica del problema porta alla seguente formula:

$$P = 2EA \left[ -1 + \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{d}{L} \sin(15^\circ) + \left(\frac{d}{L}\right)^2}} \right] \left( \sin(15^\circ) - \frac{d}{L} \right)$$

il cui andamento è dato dal grafico:



I due esempi analizzati differiscono solo per la ‘modalità’ di applicazione del carico: nell’esempio ‘Arco-ribassato’ il programma riesce a ‘saltare’ il tratto a pendenza negativa, mentre nel secondo esempio si ferma prima.

**RISULTATI**

I risultati ottenuti da XFINEST (riportati in tabella) sono in ottimo accordo con quelli teorici.

	Xfinest	Teorico
$\Delta$	F	P/2
0	0	0
0.1111085	1470	1470.001
0.2393087	2940	2940.003
0.3947786	4410	4410.003
0.6047521	5880	5880.005
5.59757	7320.6	7320.578
5.598983	7350	7349.982
5.667684	8820	8819.98

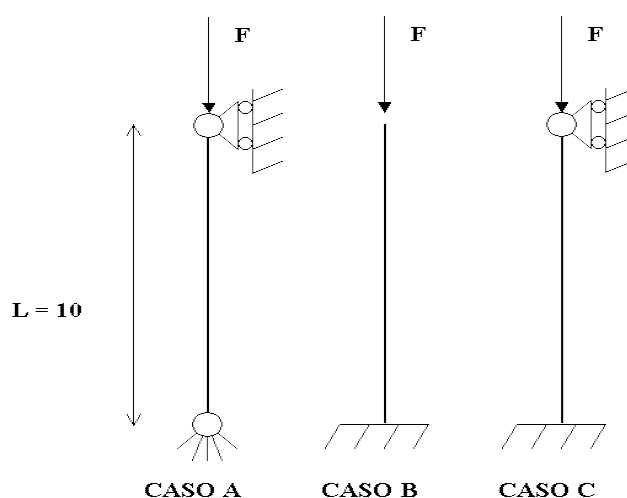
## ASTA DI EULERO

### SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici:</b>	
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Buckling lineare
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	BEAM
<b>File:</b>	eulero-a-lw, eulero-a-ssi, eulero-b-lw, eulero-b-ssi, eulero-c-lw, eulero-c-ssi

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Si considerano la condizioni di vincolo indicate in figura.



La colonna è sottoposta a una forza **F=5.14** diretta verso il basso. La sezione è quadrata di lato 0.5 e si è adottato un modulo elastico **E=100000**.

Verificare la precisione con cui il programma calcola il carico critico di EULERO per un'asta soggetta a un'azione assiale costante di compressione e a differenti condizioni di vincolo (esempi A, B e C).

### MODELLO AD ELEMENTI FINITI

La mesh è costituita da due elementi BEAM di pari lunghezza nei primi tre modelli (A-B e C) tranne che nel modello C-SSI in cui si utilizzano sei elementi (con due elementi la SSI non riesce a determinare gli autovalori e gli autovettori).

### NOTE

L'analisi è stata effettuata utilizzando sia il metodo di Lanczos (modello '...-lw') che la SSI (Sub Space Iteration – modello '....-ssi'). Il carico critico di Eulero è dato dalle formule:

$$\text{caso a) } P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = 51.40$$

$$\text{caso b) } P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} = 12.85$$

$$\text{caso c) } P_{cr} = 2.046 \frac{\pi^2 EI}{L^2} = 105.16$$

**RISULTATI**

I risultati ottenuti da XFINEST sono in ottimo accordo con quelli teorici.

In tabella si riporta il moltiplicatore del carico applicato al modello che porta al carico critico. Si ottengono gli stessi risultati con entrambe le formulazioni (*classica* e *secante*.)

caso	Teorico	LANCZOS	SSI
A	10	10.0552	10.0552
B	2.5	2.5002	2.5002
C	20.46	20.8940	20.3823 (*)

(\*) Ottenuto schematizzando la colonna con 6 elementi BEAM (con 2 elementi non si ha convergenza).

## INSTABILITÀ DI UN ARCO CIRCOLARE

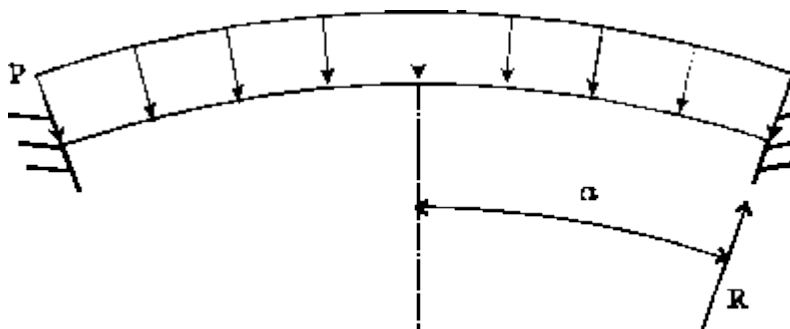
### SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici</b>	Timoshenko & Gere “Theory of elastic stability” <i>McGraw-Hill Kogakusha, LTD.</i> , Second Edition.
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Buckling lineare
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	BEAM
<b>File:</b>	circular-arch-lw_20el, circular-arch-ssi_20el, circular-arch-lw_40el, circular-arch-ssi_40el

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Si considera un arco circolare (angolo al centro  $45^\circ$ , raggio 64.85) incastrato ad entrambe le estremità e sottoposto a un carico distribuito unitario diretto verso il centro dell'arco. La sezione è quadrata di lato unitario. Il modulo elastico vale 2.100.000.

Verificare l'abilità dell'elemento BEAM nel rappresentare il comportamento d'instabilità di travi 'curve'.



### MODELLO AD ELEMENTI FINITI

Si sono considerati due modelli con differente numero di elementi BEAM: 20 e 40.

### NOTE

L'analisi è stata effettuata utilizzando sia il metodo di LANCZOS (modello '....-lw') che la SSI (Sub Space Iteration – modello '....-ssi').

In quest'ultimo caso è stato necessario cambiare il valore di default del numero di autovettori da considerare durante la SSI (di default il programma avrebbe utilizzato 10 autovettori) portandolo a 31 nel modello con 20 elementi e a 80 in quello con 40 elementi. Se si lasciano i valori di default il programma non riesce a raggiungere la convergenza richiesta ( $10^{-6}$ ) nel numero massimo di iterazioni (25).

Inoltre confrontando i modi di buckling ottenuti con i due metodi di soluzione, si nota che in LANCZOS c'è un disaccoppiamento degli spostamenti verticali da quelli orizzontali (per cui il primo e il secondo modo hanno solo spostamenti fuori piano – orizzontali – mentre il terzo modo ha praticamente solo spostamenti nel piano – verticali).

*In conclusione la SSI si dimostra meno affidabile del metodo di LANCZOS, per cui consigliamo l'utilizzo sempre di quest'ultimo nel modulo di buckling.*

**RISULTATI**

I risultati ottenuti da XFINEST sono in buon accordo con quelli teorici.

Formulazione '*classica*'

Modo	Teorico	ADINA	LANCZOS		SSI	
			20 elementi	40 elementi	20 elementi	40 elementi
1° fuori piano	-	40	40.1517	40.1399	40.1557	40.1402
1° nel piano	83	85	87.7107	87.6834	87.9067	87.8819

Formulazione '*secante*'

Modo	Teorico	ADINA	LANCZOS		SSI	
			20 elementi	40 elementi	20 elementi	40 elementi
1° fuori piano	-	40	40.3036	40.1807	-	-
1° nel piano	83	85	83.5980	83.4897	-	-

Con questa formulazione il programma non riesce a raggiungere la convergenza nel numero di iterazioni di default nel caso di SSI.



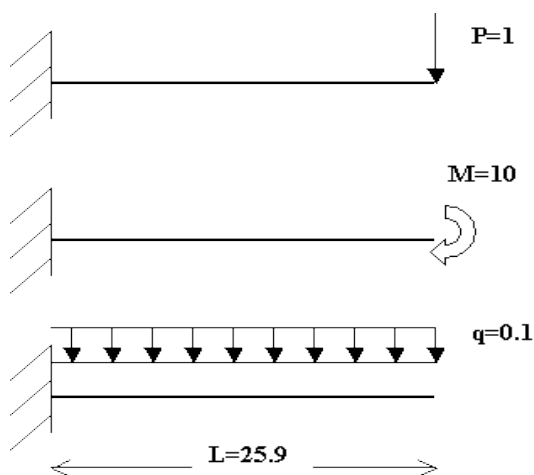
## INSTABILITÀ LATERALE DI UNA TRAVE A MENSOLA

### SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici</b>	Timoshenko & Gere “Theory of elastic stability” <i>McGraw-Hill Kogakusha, LTD.</i> , Second Edition.
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Buckling lineare
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	BEAM
<b>File:</b>	cant-tip-moment_5el, cant-tip-moment_20el, cant-tip-force_5el, cant-tip-force_20el, cant-dist-force_5el, cant-dist-force_20el

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

La geometria del problema è descritta in figura, come pure le tre condizioni di carico adottate.



La sezione è un tubo di diametro  $D=0.508$  e spessore  $S=0.0127$ .

Il materiale è caratterizzato da un modulo elastico  $E=21.000.000$  e da un coefficiente di Poisson  $\nu=0.3$ .

I carichi sono caratterizzati dai valori indicati in figura. Si è applicato al modello un carico compreso tra 1/10 e 1/100 del carico critico teorico, in modo da avere una deformata alla fine dell'analisi nonlineare che precede l'analisi d'instabilità (e sulla quale viene calcolata la matrice 'geometrica' del modello) prossima alla configurazione indeformata.

Non si deve eccedere né assegnando un carico troppo grande (in genere non si può assegnarlo maggiore del carico critico perché si rischia di non riuscire a far convergere l'analisi nonlineare) né un carico troppo piccolo (per evitare problemi numerici nel calcolo degli autovalori nell'analisi di buckling).

### MODELLO AD ELEMENTI FINITI

Si sono adottate due mesh per ognuno dei tre tipi di carico: nel primo la mensola viene schematizzata con 5 elementi BEAM, nella seconda si utilizzano 20 elementi.

### NOTE

L'analisi è stata effettuata utilizzando solo il metodo di Lanczos.

Il carico critico è dato dalle seguenti formule<sup>3</sup>:

$$P_{cr} = \frac{4.013}{L^2} \sqrt{EI_{\eta} C} = 66.815$$

$$M_{cr} = \frac{\pi}{2L} \sqrt{EI_{\eta} C} = 677.37$$

$$q_{cr} = \frac{12.85}{L^3} \sqrt{EI_{\eta} C} = 8.2605$$

in cui :

- $C$  è il modulo di rigidezza a torsione, dato dal prodotto del modulo di elasticità a taglio  $G$  per la rigidezza torsionale  $K$  della sezione (in questo caso coincidente con il momento d'inerzia polare  $I_p = I_x + I_y$ ).
- $I_{\eta}$  in questo caso coincide con il momento d'inerzia attorno all'asse verticale (i carichi considerati agiscono tutti nel piano verticale).

Nel calcolo delle formule sopra riportate si è trascurato il contributo dell'ingobbamento della sezione durante lo sbandamento laterale della mensola, non essendo previsto questo comportamento nella formulazione dell'elemento BEAM di XFINEST.

## RISULTATI

I risultati ottenuti da XFINEST sono in ottimo accordo con quelli teorici, dimostrando la capacità del programma di simulare l'instabilità laterale per sezioni in cui il contributo della rigidezza a ingobbamento sia trascurabile nei confronti della rigidezza a torsione  $C$ .

In tabella si riporta il moltiplicatore del carico applicato al modello che porta al carico critico.<sup>4</sup>

caso	Teorico	5 elementi	20 elementi
momento flettente	67.737	67.750	67.482
forza concentrata	66.815	63.805	67.125
forza distribuita	82.605	74.473	81.831

<sup>3</sup> Le formule sono riportate nei paragrafi **6.2 Lateral Buckling of Beam in Pure Bending** e **6.3 Lateral Buckling of a Cantilever Beam** del Timoshenko & Gere.

<sup>4</sup> I valori in tabella sono stati ottenuti con la formulazione '*classica*'. Utilizzando quella *secante* si ottengono dei valori privi di senso (il moltiplicatore calcolato è sempre di poco superiore all'unità, indipendentemente dall'entità del carico applicato – ad es. aumentando il carico di un fattore 10 nel modello cant-tip-moment\_20el si passa da un LOAD FACTOR di 1.37 a 1.00)

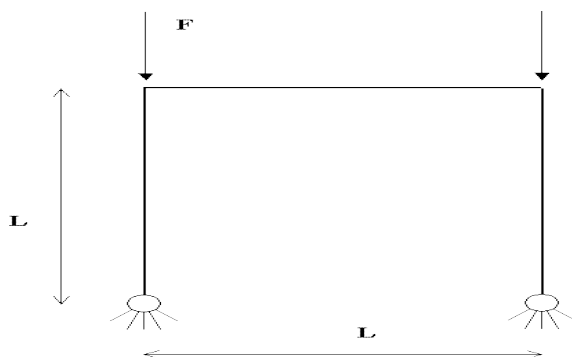
## INSTABILITA' DI UN PORTALE INCERNIERATO ALLA BASE

### SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici</b>	Timoshenko & Gere "Theory of elastic stability" <i>McGraw-Hill Kogakusha, LTD.</i> , Second Edition.
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Buckling lineare
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	BEAM
<b>File:</b>	pinned-frame-a100, pinned-frame-a10000

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

La geometria del problema è descritta in figura (si sono considerati solo gli spostamenti nel piano del telaio). Verificare l'abilità del programma di calcolare il carico critico d'instabilità nel caso di un portale con cerniere alla base delle colonne.



Il telaio è soggetto a due forze  $F=0.1$ . Il materiale presenta modulo elastico  $E=1.0$ .

La sezione presenta momento d'inerzia flessionale unitario ( $I_x=1.0$ ); per quanto riguarda l'area si sono adottati due diversi valori della stessa ( $A=100$  nel primo modello e  $A=10000$  nel secondo) onde mostrare l'influenza del valore di questa nel calcolo del carico critico.<sup>5</sup>

### MODELLO AD ELEMENTI FINITI

Si è considerato un solo elemento sia per le colonne che per il traverso.

### NOTE

L'analisi è stata effettuata utilizzando solo il metodo di Lanczos. Il carico critico è dato dalla seguente formula<sup>6</sup>:

$$P_{cr} = \frac{1.82}{L^2} EI = 1.82$$

### RISULTATI

I risultati ottenuti da XFINEST sono in ottimo accordo con quelli teorici.

In tabella si riporta il moltiplicatore del carico applicato al modello che porta al carico critico.

area	Teorico	XFINEST
100	18.2	16.905
10000	"	18.250

<sup>5</sup> La formula teorica più avanti riportata è riferita al caso di un telaio in cui è presente il solo comportamento flessionale degli elementi, considerando 'inestensibili' assialmente gli elementi.

<sup>6</sup> Paragrafo **2.4 Buckling of Frames**.

## CONFRONTO TRA LA FORMULAZIONE SECANTE E CLASSICA

## SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici</b>	
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Buckling lineare
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	BEAM
<b>File:</b>	pinned-frame-a100, pinned-frame-a10000

## DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Il modello (colonna con vincoli di cerniere e carrello, schematizzato con due elementi beam e caricato di punta) è sottoposto a due carichi base rappresentati con due condizioni lineari che indicheremo di seguito come P (LCAS=1) e Q (LCAS=2). Il carico P rappresenta il carico permanente e quindi si suppone sia costante e non possa variare di intensità, mentre il carico Q rappresenta il carico accidentale che si suppone possa assumere anche valori maggiori di quelli utilizzati nel modello. In condizioni normali il carico massimo applicato vale P+Q. Si vuole determinare il moltiplicatore ( $\lambda$ ) del carico Q che determina l'instabilità della struttura.<sup>7</sup>

Possiamo in questo modo verificare l'abilità del programma di calcolare il carico critico d'instabilità per una variazione di una parte dei carichi applicati alla struttura.<sup>8</sup>

## MODELLO AD ELEMENTI FINITI

Si considerano due condizioni di carico nonlineari: la prima ottenuta applicando il solo carico Q e la seconda applicando il carico P+Q (ovvero mantenendo costante il carico P e incrementando il carico Q).<sup>9</sup>

L'analisi di buckling viene effettuata dal programma alla fine dell'ultima condizione di carico nonlineare e quindi sotto il carico P+Q. A seconda del metodo utilizzato nell'analisi di instabilità si otterrà il moltiplicatore del carico totale (carico di buckling  $\lambda(P+Q)$  con la formulazione CLASSICA) o dell'incremento di carico applicato durante l'ultima analisi nonlineare, ovvero del carico Q nel nostro caso (carico di buckling  $P+\lambda Q$  con la formulazione SECANTE).

## NOTE

L'analisi è stata effettuata utilizzando solo il metodo di Lanczos.

## RISULTATI

Applicando la formazione classica si ottiene un moltiplicatore  $\lambda=9.141$  per il carico totale ( $P+Q=5.654$ ), mentre applicando la formulazione secante si ottiene un valore  $\lambda=90.552$  per il solo incremento del carico Q ( $=0.514$ ). Dato che nel modello il carico Q non è altri che il carico P ridotto di un fattore 10, il carico d'instabilità fornito dai due approcci deve essere lo stesso:

classica	$\lambda(P+Q) =$	$9.141 \cdot (5.14 + 0.514) =$	51.68
secante	$P + \lambda Q =$	$5.14 + 90.552 \cdot 0.514 =$	51.68

<sup>7</sup> Si suppone che la struttura si instabilizzi sotto il carico  $P+\lambda Q$ .

<sup>8</sup> Si consideri ad es. il caso di una struttura soggetta a un carico permanente e uno accidentale e si supponga di voler determinare il moltiplicatore del carico accidentale che porta la struttura all'instabilità.

<sup>9</sup> Le schede di XFINEST utilizzate per descrivere la modalità di applicazione del carico indicata sono le seguenti:

```
nlca=00000001,
  bcas1=00000001 nlfa1=0.100000E+01 tab11=00000001
nlca=00000002,
  bcas1=00000002 nlfa1=0.100000E+01 tab11=00000001,
  bcas2=00000001 nlfa2=0.100000E+01 tab12=00000002
tab1=00000001 type=LT
  0.00000 0.00000
  1.00000 1.00000
tab1=00000002 type=LT
  0.00000 1.00000
  1.00000 1.00000
```

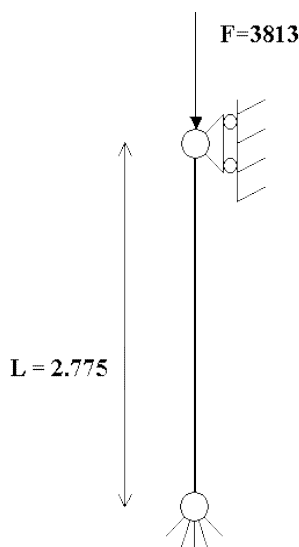
## INSTABILITA' TORSIONALE DI UNA COLONNA

### SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici</b>	
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Buckling lineare
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	BEAM
<b>File:</b>	torsional buckling

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

La geometria del problema è descritta in figura (unità di misura N e m).



### SEZIONE

Area = 386.7 mm<sup>2</sup>       $K_t = 290.025 \text{ mm}^4$        $I_2 = 215415.917 \text{ mm}^4$        $I_3 = 323778.125 \text{ mm}^4$   
 $C_1 = 0$ . (warping rigidity)

### MATERIALE

$E = 206000 \text{ N/mm}^2$        $\nu = 0.3$        $G = 79231 \text{ N/mm}^2$

### MODELLO AD ELEMENTI FINITI

La mesh è costituita da due elementi BEAM di pari lunghezza. La cerniera impedisce la rotazione attorno all'asse verticale (Z) per evitare labilità, mentre in corrispondenza del carrello e del nodo intermedio la rotazione Z è libera.

### NOTE

L'analisi è stata effettuata utilizzando solo il metodo di Lanczos. Il carico critico di Eulero è dato dalla formula:

$$P_{cr} = \frac{A}{I_o} \left( C + \frac{n^2 \pi^2 C_1}{L^2} \right) = \frac{A}{I_2 + I_3} \left( GK_t + \frac{n^2 \pi^2 C_1}{L^2} \right) = 16490$$

(nella formula sopra riportata si è assunto che la rigidezza di ingobbamento – warping - sia nulla).

### RISULTATI

I risultati ottenuti da XFINEST sono in ottimo accordo con quelli teorici (si è ottenuto un moltiplicatore del carico pari a 4.32 (=16490/3813) con tutti e tre i metodi (classico, secante e lineare).

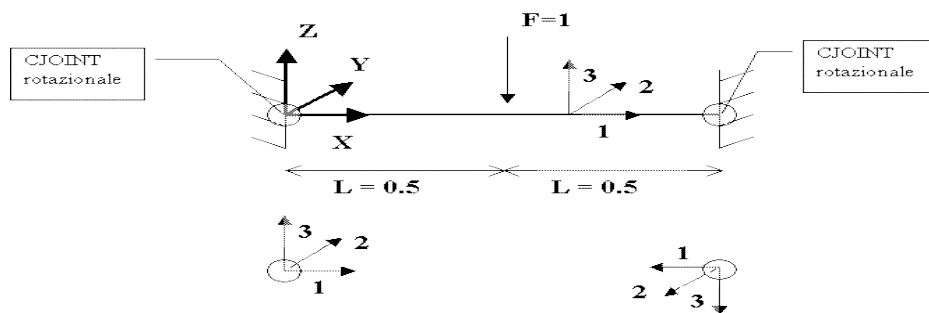
## LEGAME A TRILATERA PER CJOINT

### SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici</b>	
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Statica non lineare
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	CJOINT
<b>File:</b>	trilatera, trilatera1

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

La geometria del problema è descritta in figura.

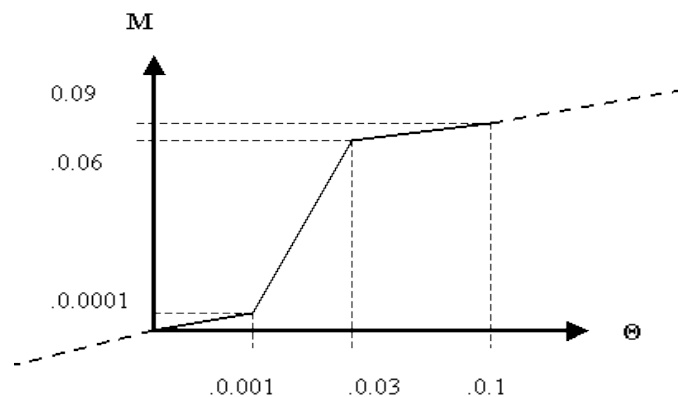


### MODELLO AD ELEMENTI FINITI

La mesh è costituita da due elementi BEAM di pari lunghezza. Il primo estremo (nodo 1) dell'elemento 1 e il secondo estremo dell'elemento 2 (nodo 3) sono collegati a due nodi 'a terra' (rispettivamente nodo 11 e 13) mediante due elementi CJOINT dotati di sola rigidezza rotazionale. I gradi di libertà traslazionali dei nodi 1 e 3 sono uguali a quelli dei nodi a terra (utilizzo degli MPC).

In mezzzeria (nodo 2) viene applicato un carico concentrato di valore  $-1$  diretto come l'asse Z.

Si assume la seguente legge Momento-Rotazione ( $M-\Theta$ ) per la rotazione attorno all'asse 2 dell'elemento CJOINT.



**NOTE**

Per il legame Momento-Rotazione si è assunto un comportamento asimmetrico (la curva è stata definita solo per valori positivi di  $M$  e  $\Theta$ ). I tratti a tratteggio indicano che per valori inferiori al minimo e superiori al massimo valore definito si assume un valore ottenuto prolungando il primo e l'ultimo tratto della poligonale.

Avendo definito una curva 'asimmetrica' rispetto all'origine, diventa fondamentale adottare il corretto orientamento per gli elementi CJOINT.

Nell'esempio in oggetto si è dovuto assumere un sistema di riferimento locale per i due elementi CJOINT diverso (si veda la prima figura alla pagina precedente). Se si fosse assunto per il secondo elemento CJOINT lo stesso sistema locale adottato per il primo elemento CJOINT, come conseguenza dell'inflessione della trave avremmo una rotazione positiva per il primo elemento CJOINT e negativa per il secondo, per cui la struttura non risulterebbe simmetrica (il momento di semi-incastro al primo estremo sarebbe diverso da quello al secondo estremo). Assumendo i sistemi di riferimento indicati in figura, abbiamo invece una rotazione positiva per entrambi gli elementi CJOINT e quindi la struttura risulta simmetrica.

**RISULTATI**

Xfinest fornisce un valore di 0.032076 rad. per le rotazioni agli estremi della trave. Entrando con questo valore nella curva  $M-\Theta$  si ottiene per  $M$  un valore di 0.06089. Se consideriamo la trave in semplice appoggio (cerniere ai due estremi) caricata come nel modello, avremmo una rotazione agli estremi pari a 0.0625 rad.. Per effetto del momento trasmesso dal CJOINT abbiamo una rotazione di segno contrario pari a  $M/2=0.03044$  rad.

Per cui la rotazione finale è data da  $0.0625-0.03044 = 0.032055$  rad, in ottimo accordo con il valore fornito dal programma. Il momento in mezzzeria è dato da  $\frac{PL}{4} - 0.06089 = 0.18911$ , in accordo con il valore fornito da Xfinest (a meno della tolleranza sui residui adottata dal programma pari a 0.0001).

## PIASTRA ORTOTROPA SOTTO UN CARICO TRASVERSALE UNIFORME

## SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici</b>	Timoshenko, S.P. & Woinowsky-Krieger, S. "Theory of Plates and Shells", <i>McGraw-Hill</i> , 1959, Second Edition.
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Buckling lineare
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	BEAM
<b>File:</b>	qf46-39

## DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Piastra quadrata di lato 0.6 m, spessore 0.015 m, appoggiata lungo i quattro lati e sottoposta a un carico verticale uniforme (1000 N/m<sup>2</sup>).

Sfruttando le condizioni di simmetria si è rappresentato nel modello  $\frac{1}{4}$  della piastra. I nodi dei lati 17-289 e 273-289 sono appoggiati, mentre i nodi del lato 1-17 hanno vincoli di simmetria rispetto al piano  $Y=0$ , mentre quelli del lato 1-273 hanno vincoli di simmetria rispetto al piano  $x=0$ .

## MODELLO AD ELEMENTI FINITI

La mesh è costituita da una maglia di 16x16 elementi QF46. Gli assi di ortotropia del materiale coincidono con gli assi globali. Il materiale presenta le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}
 E2 &= 1.35548e10 \\
 E3 &= 1.1295e9 \\
 NU23 &= 0.0384782 \\
 G23 &= G13 = G12 = 1.17e9 \\
 BETA &= 0
 \end{aligned}$$

## RISULTATI

I risultati ottenuti da XFINEST sono in ottimo accordo con quelli teorici.

Nelle due tabelle che seguono sono riportati gli spostamenti verticali in alcuni punti (si veda la figura precedente per l'ubicazione di questi all'interno della piastra) e le azioni negli elementi 1 (in corrispondenza del nodo 1), 8 (elemento a 'sinistra' del nodo 9) e 9 (elemento a 'destra' del nodo 9).

	nodo	Teorico	XFINEST
	1	$3.543 \cdot 10^{-4}$	$3.597 \cdot 10^{-4}$
	9	$2.529 \cdot 10^{-4}$	$2.569 \cdot 10^{-4}$
	145	$1.935 \cdot 10^{-4}$	$1.971 \cdot 10^{-4}$

	Teorico		XFINEST	
Nodo (elemento)	M22	M33	M22	M33
1 (1)	37.489	3.685	37.72	3.705
9 (8)	28.44	2.680	29.74	2.737
9 (9)	28.44	2.680	27.51	2.651



## PIASTRA ORTOTROPA – PATCH TEST COMPORTAMENTO MEMBRANALE

### SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici</b>	Jones, R.M., “Mechanics of Composite Materials”, <i>Scripta Book Company</i> , 1975.
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Buckling lineare
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	BEAM
<b>File:</b>	qf46-62

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Piastra quadrata di lato 10 m, spessore 0.1 m, sottoposta a tensione bi-assiale uniforme ( $N_{22}=N_{33}=N_{23}=0.1$ ).

### MODELLO AD ELEMENTI FINITI

La mesh è costituita da 5 elementi QF46.

L'asse 2 di ortotropia del materiale forma un angolo di 30° (antiorario) con l'asse X globale.

Dato che l'orientamento del sistema locale varia da elemento a elemento, si è assegnato l'orientamento dell'asse 2 di ortotropia definendo i coseni direttori nel sistema globale.

Il materiale presenta le seguenti caratteristiche:

$$E_2 = 0.2E+08$$

$$E_3 = 0.1E+08$$

$$\nu_{23} = 0.2$$

$$G_{23} = G_{13} = G_{12} = 0.8E+06$$

$$COAX = 0.866025404$$

$$COAY = 0.5$$

$$COAZ = 0$$

Carichi:

$$F_x = +0.5 \text{ N} \quad (\text{nodi } 13, 16)$$

$$F_x = -0.5 \text{ N} \quad (\text{nodo } 9)$$

$$F_y = +0.5 \text{ N} \quad (\text{nodi } 9, 16)$$

$$F_y = -0.5 \text{ N} \quad (\text{nodo } 9)$$

Vincoli:

cerniera nel nodo 10 (spostamenti X e Y impediti)

carrello nel nodo 13 (spostamento Y impedito)

spostamenti Z impediti per tutti i nodi

### RISULTATI

I risultati ottenuti da XFINEST sono in ottimo accordo con quelli teorici.

Nella tabella che segue sono riportati gli spostamenti del nodo 16.

Teorico		XFINEST	
X	Y	X	Y
$2.03077 \cdot 10^{-6}$	$2.75314 \cdot 10^{-6}$	$2.030514 \cdot 10^{-6}$	$2.753461 \cdot 10^{-6}$

## FLESSIONE PURA DI UNA PIASTRA ORTOTROPA – PATCH TEST ELEMENTI QF46 DISTORTI

### SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici</b>	Jones, R.M., “Mechanics of Composite Materials”, <i>Scripta Book Company</i> , 1975.
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Buckling lineare
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	BEAM
<b>File:</b>	qf46-63

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Piastra quadrata di lato 10 m, spessore 0.1 m, sottoposta a flessione pura (curvatura costante nel piano XZ).

### MODELLO AD ELEMENTI FINITI

La mesh è costituita da 16 elementi QF46.

L'asse 2 di ortotropia del materiale forma un angolo di 30° (antiorario) con l'asse X globale.

In questo caso l'asse locale 2 di tutti gli elementi (pur se distorti) risulta parallelo all'asse X e l'asse 3 parallelo all'asse Y per cui si può indifferentemente definire la direzione dell'asse 2 di ortotropia definendo i coseni direttori nel sistema globale oppure assegnato l'angolo BETA=30 per tutti gli elementi.

Il materiale presenta le seguenti caratteristiche:

$$E2 = 0.2E+08$$

$$E3 = 0.1E+08$$

$$NU23 = 0.2$$

$$G23 = G13 = G12 = 0.8E+06$$

$$COAX = 0.866025404$$

$$COAY = 0.5$$

$$COAZ = 0$$

Carichi:

$$M_y = +0.6 \text{ N/m} \quad \text{lungo il lato 5-25}$$

$$M_y = -0.6 \text{ N/m} \quad \text{lungo il lato 1-21}$$

Vincoli:

incastro nel nodo 1

spostamento Y e rotazione Z impediti nel nodo 5

### RISULTATI

I risultati ottenuti da XFINEST sono in ottimo accordo con quelli teorici.

Nella tabella che segue sono riportati gli spostamenti di alcuni nodi (si veda la figura sopra riportata per l'ubicazione di questi).

nodo	Teorico	XFINEST
21	0.07875	0.07875
25	0.07510	0.075113
5	-0.09405	-0.09405

## DEFINIZIONE VINCOLI OBLIQUI

### SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici</b>	1. Jones, R.M., "Mechanics of Composite Materials", <i>Scripta Book Company</i> , 1975.
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Buckling lineare
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	BEAM
<b>File:</b>	vincoli_obliqui

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Si considera un telaio piano (due colonne e un traverso) definito nel piano XZ, sottoposto a un carico distribuito uniforme applicato alla colonna di destra (si considerano due condizioni di carico: nella prima il carico uniforme è applicato lungo l'asse locale 3, nella seconda lungo l'asse locale 2).

L'asse locale 2 per tutte le beam è diretto come l'asse globale Y.

Il telaio presenta vincoli di tipo cerniera (colonna sinistra) e carrello (colonna destra) nel piano del telaio (XZ) e dei vincoli di incastro fuori piano: il nodo 1 ha pertanto vincolo 12346, mentre il nodo 2 ha vincolo 2346.

Per come sono applicati i carichi e i vincoli, nella prima condizione di carico il nodo 2 ha reazioni tutte nulle, mentre nella seconda condizione entrambi i nodi 1 e 2 presentano reazioni non nulle.

Un secondo telaio è ottenuto ruotando il primo di 45° attorno all'asse Z (il piano del telaio è individuato dalla bisettrice degli assi XY e dall'asse Z).

Il telaio è caricato esattamente come il primo telaio.

Per i vincoli abbiamo: al nodo 11 (corrispondente al nodo 1 del primo telaio) i vincoli nel sistema globale 1236 (le traslazioni e la rotazione attorno a Z nulle), mentre il vincolo 'obliquo' costituito dalla cerniera nel piano del telaio si traduce nel fatto che le rotazioni RX e RY devono dare come risultante un vettore normale al piano del telaio (diretto come la bisettrice del secondo quadrante XY)<sup>10</sup> ovvero  $R_X = -R_Y$ ; al nodo 12 (corrispondente al nodo 2) i vincoli 36 nel sistema globale, mentre il vincolo 'obliquo' costituito dal carrello nel piano del telaio si traduce nelle due condizioni geometriche  $S_Y = S_X$  (spostamento nel piano del telaio, diretto come la bisettrice del primo quadrante)<sup>11</sup> e  $R_Y = -R_X$  (come per il primo nodo la rotazione risultante deve essere normale al piano del telaio)<sup>12</sup>

La geometria del problema è descritta nella figura alla pagina seguente..

### MODELLO AD ELEMENTI FINITI

Le mesh del modello e i vincoli imposto sono descritti nel paragrafo precedente.

### RISULTATI

Gli spostamenti e le reazioni del secondo telaio coincidono con quelli del primo telaio ruotati di 45°.

Le azioni interne negli elementi dei due telai coincidono.

<sup>10</sup>Comando MPC da utilizzare nel file di input:

mpc node= 11 idof=5 nfree= 11 idof=4 beta=-1.

<sup>11</sup>Comando MPC da inserire nel file di input:

mpc node= 12 idof=2 nfree= 12 idof=1 beta= 1.

<sup>12</sup>Comando MPC da inserire nel file di input:

mpc node= 12 idof=5 nfree= 12 idof=4 beta=-1.

## MEMBRANA ELLITTICA

### SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici</b>	NAFEMS, Background to benchmarks, 1993, Test n. LE1
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Statica lineare
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	Isoshell, QF46
<b>File:</b>	naf_1_a, naf_1_b, naf_1_c, naf_1_d, naf_1_e

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Si considera una lastra avente una forma ellittica. La lastra è soggetta a soli carichi nel piano rappresentati da una pressione uniforme agente in direzione uscente rispetto alla lastra stessa.

I vincoli sono disposti lungo le due superfici orizzontali e verticali e sono tali da impedire gli spostamenti solo in direzione perpendicolare alla linea di appoggio delimitate da nodi 33-34 e 35-36.

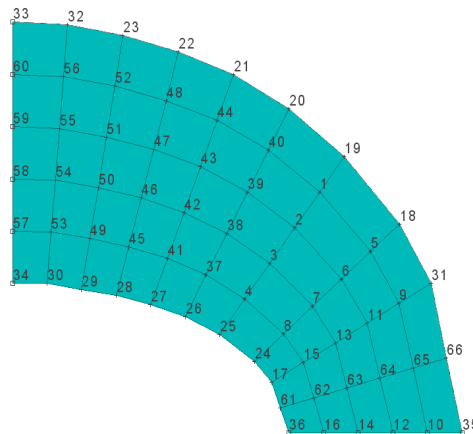
La geometria del problema è descritta nella figura seguente. La geometria è stata introdotta inserendo i nodi secondo l'equazione della superficie riportata nel testo originale.

Scopo dell'esempio è determinare il valore dello sforzo in direzione verticale nel nodo 36.

I valori dei parametri meccanici sono i seguenti:

$E=210000$  Mpa,  $\nu=0.3$ , spessore lastra= $0.1$  m.

Il test consente di valutare il comportamento degli elementi lastra-piastra di Xfinest in un punto di concentrazione di tensioni.



### MODELLO AD ELEMENTI FINITI

Sono state considerate 5 diverse configurazioni di mesh.

La pressione che nel modello originale è prevista agente lungo i bordi degli elementi bidimensionali è stata applicata inserendo delle aste fittizie tra i nodi 33 e 35 ed applicandovi dei carichi distribuiti pari a 10Mpa (valore ottenuto moltiplicando la pressione di 10 Mpa, fornita nell'esempio originale per lo spessore della piastra pari a 100 mm).

## RISULTATI

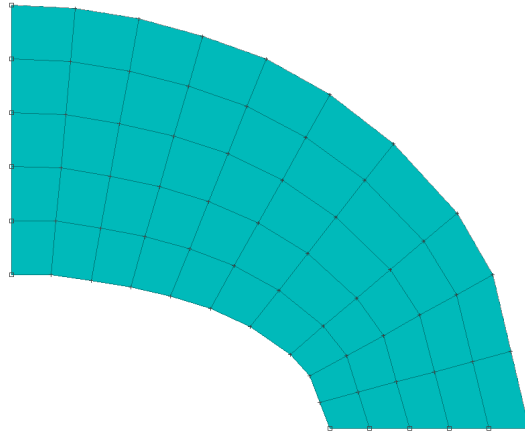
Valore del target di tensione in direzione verticale nel nodo 36 = 92.7 Mpa .

Nel caso dell'elemento QF46 sono stati richiesti i risultati nei nodi dell'elemento.

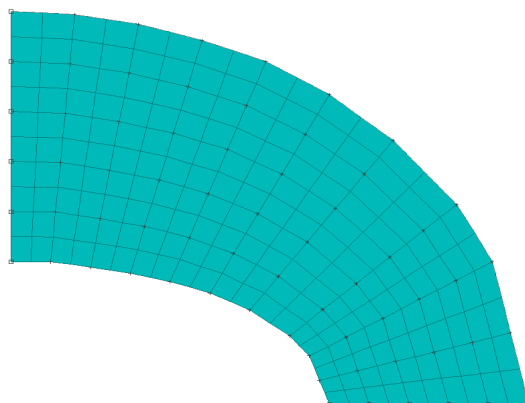
Nome modello	numero elementi	Numero equazioni	Nodo	Elemento	Tipo elemento	Tensione (Mpa)	Valore Normalizzato al teorico (%)
naf_1_a	50	396	36	5	ISOSHELL	57.5	52%
naf_1_b	50	396	36	5	QF46	76.4	82.4%
naf_1_c	200	1386	36	27	ISOSHELL	74.94	80.8%
naf_1_d	200	1386	36	27	QF46	94.26	100.1%
naf_1_e	800	5166	36	27	ISOSHELL	94.28	100.1%

I risultati mostrano come utilizzando l'elemento Isoshell che restituisce il risultato sul centroide si hanno valori interessanti a partire dalla mesh tipo C. Usando l'elemento Qf46 che restituisce i valori direttamente ai nodi (valori derivanti da quelli sui 4 punti di gauss essendo l'elemento bilineare) il valore ottenuto con la mesh tipo B è già sufficientemente vicino al valore teorico nella prima mesh. Con la mesh tipo D il risultato dell'elemento QF46 è praticamente quello corretto. Con la mesh tipo E il risultato ottenibile con l'elemento Isoshell è molto vicino a quello ottenuto usando l'elemento QF46 nella configurazione di mesh D.

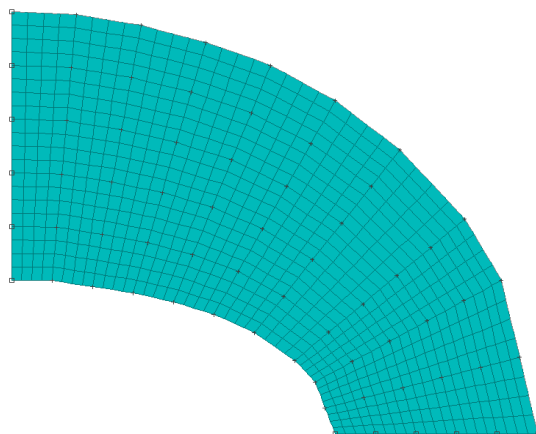
### MESH TIPO A-B



### MESH TIPO C-D



MESH TIPO E



## SEMISFERA

### SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici</b>	NAFEMS, Background to benchmarks, 1993, test n. LE3
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Statica lineare
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	Isoshell, QF46
<b>File:</b>	naf_3_a, naf_3_b, naf_3_c, naf_3_d

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Si considera una semisfera. La superficie è soggetta a carichi concentrati agenti nei nodi inferiori di bordo. Grazie alla simmetria geometrica e di carico è stata studiata una superficie pari ad  $\frac{1}{4}$  della sfera totale.

I vincoli sono disposti nel seguente modo:

nodo 3 : spostamento  $z=0$ ;

nodi da 3 a 2: spostamento lungo  $y=0$  rotazioni nulle attorno gli assi X e Z;

nodi da 3 a 44 spostamento lungo  $x=0$ , rotazione nulla attorno agli assi Y e Z;

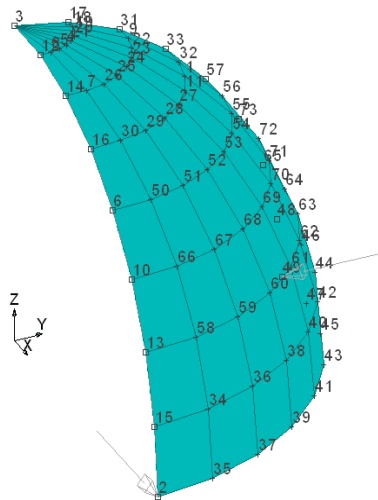
La geometria del problema è descritta nella figura seguente.

Scopo dell'esempio è determinare il valore dello spostamento in direzione X nel nodo 2.

I valori dei parametri meccanici sono i seguenti:

$E=68.25e3$  Mpa,  $\nu=0.3$ , spessore lastra= $0.04$  m.

Il test consente di verificare l'abilità degli elementi lastra-piastra di Xfinest di cogliere il comportamento fortemente flessionale del modello in questione.



### MODELLO AD ELEMENTI FINITI

Sono state considerate 2 configurazioni di meshatura. Per ogni tipo sono stati utilizzati i due elementi finiti lastra-piastra implementati in Xfinest: Isoshell e QF46.

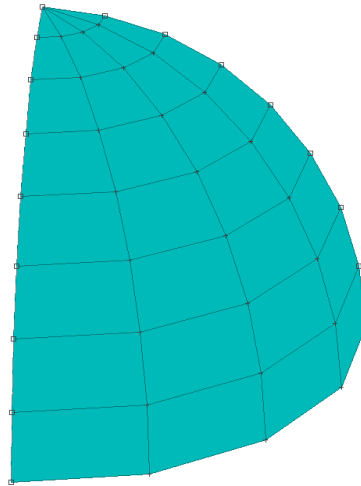
## RISULTATI

Valore target di spostamento nel nodo 2 in direzione X=0.185.

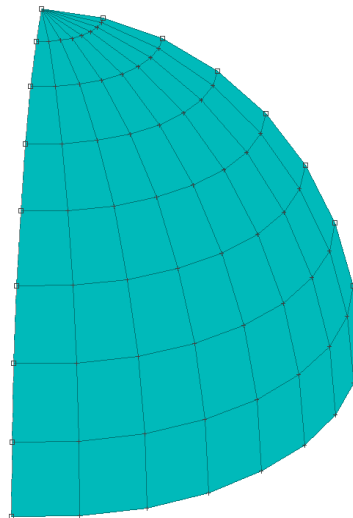
Nel caso dell'elemento QF46 sono stati richiesti i risultati nei nodi dell'elemento.

Nome modello	numero elementi	Numero equazioni	Nodo	Elemento	Tipo elemento	spostamento (m)	Valore Normalizzato al teorico (%)
naf_3_a	32	246	2	20	ISOSHELL	0.183	99%
naf_3_b	32	246	2	20	QF46	0.075	94%
naf_3_c	64	438	2	16	ISOSHELL	0.183	99%
naf_3_d	64	438	2	16	QF46	0.174	94%

### MESH TIPO A-B



### MESH TIPO C-D





## MENSOLA CON SEZIONE A Z

### SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici</b>	NAFEMS, Background to benchmarks, 1993, test n. LE5
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Statica lineare
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	Isoshell, QF46
<b>File:</b>	naf_5_a, naf_5_b, naf_5_c, naf_5_d, naf_5_e

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Si considera una mensola con sezione a Z realizzata facendo uso di elementi lastra-piastra.

La mensola è soggetta ad un'azione torcente pari a 1.2 MNm applicata nel bordo libero ed ottenuta tramite due forze pari a 0.6 MN da assegnarsi lungo i bordi individuati dai nodi 3-6 e 2-7.

I vincoli sono applicati lungo il bordo delimitato dai nodi 1-8-4-5 e riguardano solo i gdl in spostamento.

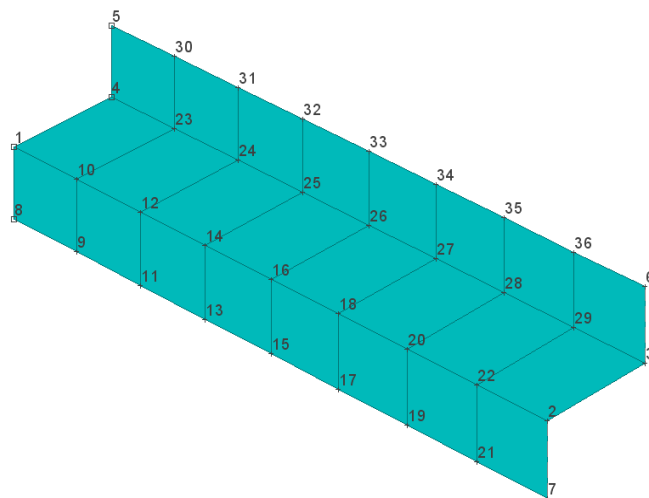
La mensola è lunga 10 m.

Scopo dell'esempio è determinare il valore dello sforzo in direzione longitudinale, nel piano medio dell'elemento, nel nodo 11.

I valori dei parametri meccanici sono i seguenti:

$E=210000$  Mpa,  $\nu=0.3$ , spessore lastra=0.1 m.

Il test consente di verificare l'abilità degli elementi lastra-piastra Xfinest di cogliere il comportamento membranale e flessionale del modello in questione.



### MODELLO AD ELEMENTI FINITI

Sono state considerate due configurazioni di mesh, una con 8 elementi lungo la direzione longitudinale. E con elementi in direzione trasversale, due per le ali ed uno per l'anima della trave; l'altra prevede un raddoppio degli elementi in ogni direzione.

## RISULTATI

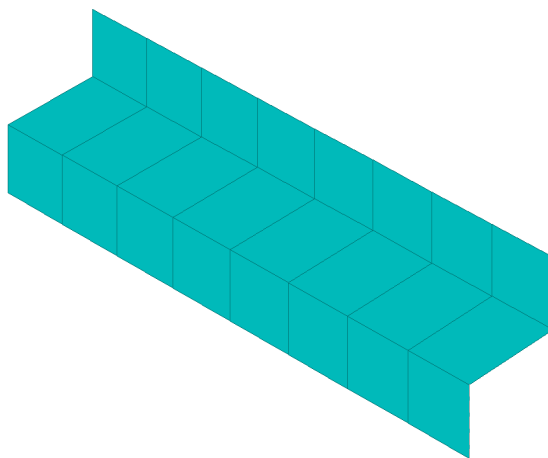
Valore target di tensione nel nodo 11=-108 Mpa.

Nel caso dell'elemento QF46 sono stati richiesti i risultati nei nodi dell'elemento.

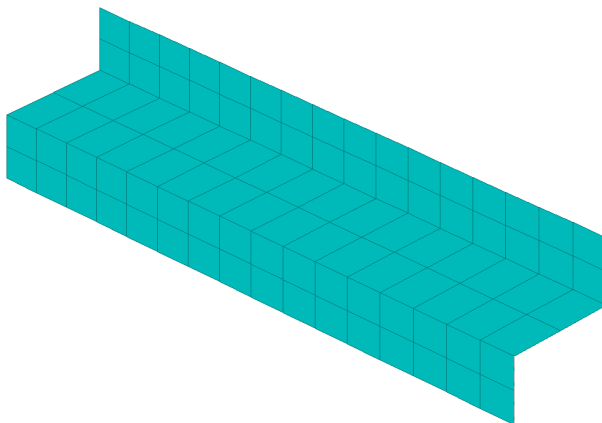
Nome modello	numero elementi	Numero equazioni	Nodo	Elemento	Tipo elemento	tensione (Mpa) (*)	Valore Normalizzato al teorico (%)
naf_5_a	24	216	11	4-5	ISOSHELL	$-(33.51+27.745)/2$ =-30.62	28%
naf_5_b	24	216	11	4-5	QF46	$-(120.213+102.29)/2$ =-111.25	103%
naf_5_c	64	714	11	35-5	ISOSHELL	$-(73.44+66.6)/2$ =-70.02	64%
naf_5_d	64	714	11	35-5	QF46	$-(112.36+108.19)/2$ =-110.27	102%
naf_5_e	384	2574	11	200-5	ISOSHELL	$-(92.97+88.53)/2$ =-90.75	84%

(\*) il calcolo riportato consiste nella media aritmetica dei valori di sforzo ottenuti facendo riferimento ai 2 elementi adiacenti che convergono nel nodo 11.

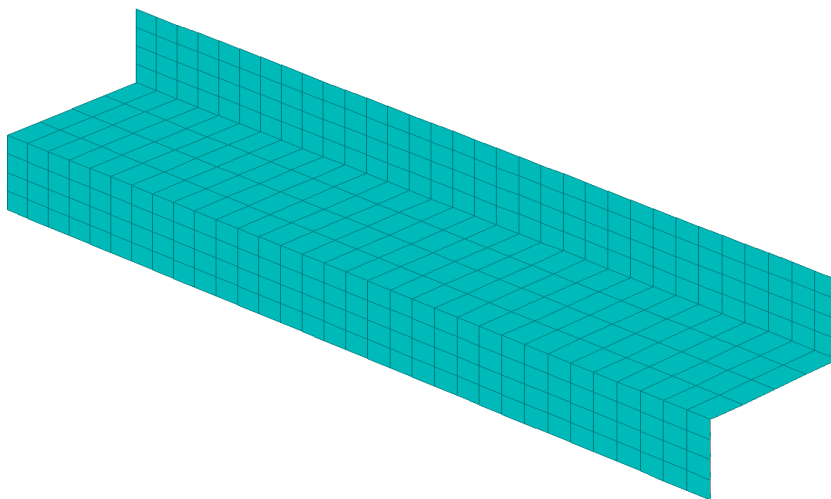
MESH TIPO A-B



MESH TIPO C-D



MESH TIPO E



## PIASTRA DEFORMATA

### SOMMARIO

<b>Riferimenti Bibliografici</b>	NAFEMS, Background to benchmarks, 1993, test n. LE6
<b>Tipo(i) di Analisi:</b>	Statica lineare
<b>Tipo(i) di Elementi:</b>	Isoshell, QF46
<b>File:</b>	naf_6_a, naf_6_b, naf_6_c, naf_6_d

### DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Si considera una piastra molto distorta soggetta ad una pressione normale rispetto al piano della piastra stessa e pari a 0.7 Kpa.

I vincoli sono applicati lungo i 4 bordi e riguardano gli spostamenti in Z e tenendo conto che gli elementi lastra-piastra implementati in Xfinest sono derivati dalla teoria di Mindlin, come suggerito nell'esempio originale, è stata anche bloccata la rotazione attorno all'asse globale Z.

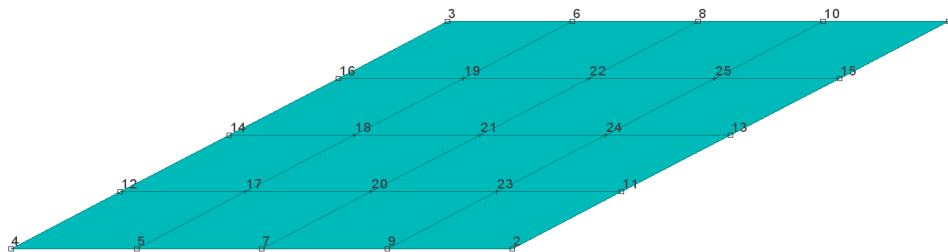
La piastra ha dimensioni dei lati pari ad 1 m.

Scopo dell'esempio è determinare il valore dello sforzo massimo principale nel bordo inferiore nel nodo 21.

I valori dei parametri meccanici sono i seguenti:

$E=210000$  Mpa,  $\nu=0.3$ , spessore lastra=0.01 m.

Il test consente di verificare il comportamento degli elementi shell di Xfinest in condizioni di distorsione della mesh.



### MODELLO AD ELEMENTI FINITI

Sono state considerate 2 configurazioni di meshatura, una con 4 elementi per ogni bordo, l'altra con 8 elementi. La mesh del tipo 2x2 è stata scartata a priori in quanto si è fatto uso nel nostro caso l'elemento a 4 nodi. Nel documento originale vengono invece proposti risultati ottenuti facendo uso di elementi shell a 8 e 16 nodi ed in questo caso la mesh 2x2 può essere giustificata.

## RISULTATI

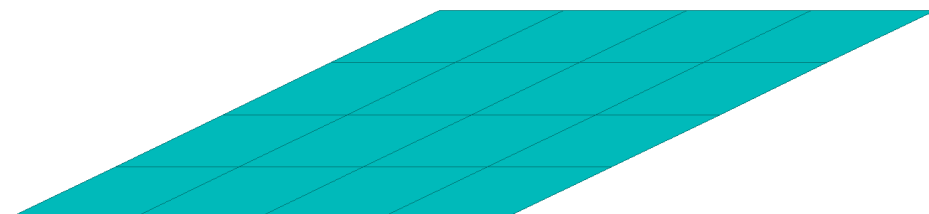
Valore target di sforzo principale nel bordo inferiore nel punto centrale piastra=0.802 Mpa.

Trattandosi della determinazione di un valore di tensione principale relativo al bordo inferiore nel nodo 11 il valore finale è stato ottenuto a partire dai valori di sollecitazione globale forniti dal solutore. Da questi valori sono state calcolati i valori di sollecitazione globale nelle direzioni principali e di seguito le tensioni nel bordo inferiore dividendo l'azione principale massima per il modulo di resistenza della sezione della piastra avente base pari ad 1 m ed altezza pari allo spessore della piastra.

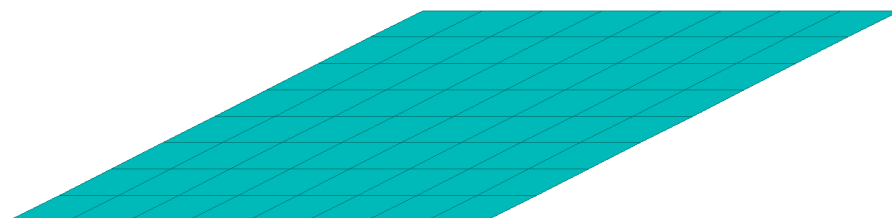
Nel caso dell'elemento QF46 sono stati richiesti i risultati nei nodi dell'elemento.

Nome modello	numero elementi	Numero equazioni	Nodo	Elementi	Tipo elemento	Mom max principali (MNm/m) El. 6=10.17 El. 7=10.51 El.11=10.17	tensione (Mpa)	Valore Normalizzato al teorico (%)
naf_6_a	16	216	11	6-7-10-11	ISOSHELL	El. 10=10.51 El. 6=11.38 El. 7=10.17 El.11=11.38	0.620	77%
naf_6_b	16	216	11	6-7-10-11	QF46	El. 10=10.17 El. 34=11.64 El. 36=11.29 El.11=11.64	0.646	80.5%
naf_6_c	64	714	11	34-36-11-44	ISOSHELL	El. 44=11.29 El. 34=12.01 El. 36=11.29 El.11=12.01	0.687	85%
naf_6_d	64	714	11	34-36-11-44	QF46	El. 44=11.29	0.699	87.1%

MESH TIPO A-B



MESH TIPO C-D



**ALLEGATO 03**

**MANUALE DI VALIDAZIONE DEL SOFTWARE**

**STRAUS 7.2.3.6**

Straus7 Software

# Verification Manual

---

*Verification tests for the Straus7 Finite Element Analysis System*



 Straus7<sup>®</sup>





# Verification Manual

---

*Verification tests for the Straus7 finite element analysis system*

---

**Edition 5a  
Release 2.3  
January 2005**

© 2005 Strand7 Pty Ltd. All rights reserved

© Copyright 2005 by Strand7 Pty Ltd. All rights reserved worldwide. This manual is protected by law. No part of this manual may be copied or distributed, transmitted, stored in a retrieval system, or translated into any human or computer language, in any form or by any means, electronic, mechanical, magnetic, manual or otherwise, or disclosed to third parties.

Strand7 Pty Ltd reserves the right to revise this publication without obligation of Strand7 Pty Ltd to notify any person or organisation of such revision.

This document is provided electronically in the PDF format. If you are a legitimate Strand7 user, you may only print one (1) copy of this manual for each copy of Strand7 you have purchased. No other printing rights are extended to any third party.

Straus7 is a registered trademark of Strand7 Pty Ltd.

**Strand7 Pty Ltd**  
Suite 1, Level 5, 65 York Street  
Sydney NSW 2000 Australia  
[info@strand7.com](mailto:info@strand7.com)

**[www.strand7.com](http://www.strand7.com)**

# Preface

This manual documents a set of test problems used for the verification of the solvers in the Straus7 finite element analysis system. The tests come from numerous sources as detailed in the reference section of each chapter. Each test gives the Straus7 result together with the target value published in the reference. Where a percentage difference between the two is given, this percentage is calculated using the following formula:

$$\% = 100 \times \left( \frac{\text{Straus7 Result} - \text{Target Value}}{\text{Target Value}} \right)$$

The data given in the *Problem sketch* of each test is intended to illustrate the problem in general terms rather than to give all the data necessary to actually perform the test.

The results given in this edition of the manual were obtained using Straus7 Release 2.3 (released in April 2004). Copies of each Straus7 model file can be found in the “Verification” folder of the Straus7 installation. Many of the model files contain additional information that may be viewed using the “Summary/Information” menu option.

The tests are divided into 10 chapters, each covering a specific solver category:

- Chapter 1: Linear Static
- Chapter 2: Linear Buckling
- Chapter 3: Nonlinear Static
- Chapter 4: Natural Frequency
- Chapter 5: Harmonic Response
- Chapter 6: Spectral Response
- Chapter 7: Linear Transient Dynamic
- Chapter 8: Nonlinear Transient Dynamic
- Chapter 9: Steady State Heat Transfer
- Chapter 10: Transient Heat Transfer



# Contents

<b>PREFACE .....</b>	<b>III</b>
<b>CHAPTER 1 .....</b>	<b>1</b>
<b>Linear Static .....</b>	<b>1</b>
VLS1: Elliptic Membrane .....	3
VLS2: Cylindrical Shell Patch Test .....	4
VLS3: Hemisphere Under Point Loads .....	5
VLS4: Z-Section Cantilever .....	6
VLS5: Skew Plate Under Normal Pressure .....	7
VLS6: Thick Plate Under Pressure .....	8
VLS7: Solid Cylinder / Taper / Sphere Under Thermal Loading .....	9
VLS8: Circular Membrane - Edge Pressure .....	10
VLS9: Circular Membrane - Point Load .....	11
VLS10: Circular Membrane Parabolic Temperature .....	12
VLS11: Plate Patch Test .....	13
VLS12: Solid Patch Test .....	14
VLS13: Straight Cantilever Beam .....	15
VLS14: Twisted Beam .....	17
VLS15: Curved Beam .....	18
VLS16: Rectangular Plate Under Normal Pressure .....	19
VLS17: Scordelis-Lo Roof .....	21
VLS18: Thick-Walled Cylinder .....	22
VLS19: Continuous Beam Under Linearly Distributed Load .....	23
VLS20: Rigid Beam Supported by Wires .....	24
VLS21: Built-in Beam Thermal Stress Problem .....	25
VLS22: Tapered Cantilever Beam .....	26
VLS23: Simply Supported Composite Beam .....	27
VLS24: Circular Clamped Plate Under Normal Pressure .....	29
VLS25: Frame With Pin Connections .....	30
VLS26: Stretching of an Orthotropic Solid .....	31
VLS27: Rectangular Plate on Elastic Foundation .....	32
VLS28: Beam on Elastic Foundation .....	33
VLS29: Pipe Under Combined Bending and Torsion .....	35
VLS30: Out-of-Plane Bending of a Curved Bar .....	36
VLS31: Laminated strip under three-point bending .....	37
VLS32: Wrapped thick cylinder under pressure and thermal loading .....	38
VLS33: Three-Layer sandwich shell under normal pressure loading .....	40
References .....	41
<b>CHAPTER 2 .....</b>	<b>43</b>
<b>Linear Buckling .....</b>	<b>43</b>
VLB1: Bar-Spring System .....	45
VLB2: 3-Member Frame .....	46

VLB3: Cantilever Beam .....	47
VLB4: Plate Column .....	48
VLB5: Plate Column – Distorted Mesh .....	49
VLB6: Simply Supported Rectangular Plate .....	50
VLB7: Square Cross-Ply Laminate Plate .....	51
VLB8: Cylindrical Shell .....	53
References .....	54
<b>CHAPTER 3.....</b>	<b>55</b>
<b>Nonlinear Static .....</b>	<b>55</b>
VNS1: Snap-Back of a Bar-Spring System .....	57
VNS2: Straight Cantilever With End Moment.....	59
VNS3: Straight Cantilever With Axial End Point Load .....	61
VNS4: Straight Cantilever With Lateral Point Load .....	63
VNS5: Limit Load GNL .....	65
VNS6: Plane Strain Plasticity .....	68
VNS7: Plane Stress Plasticity .....	70
VNS8: Solid Plasticity .....	72
VNS9: Pressurized Cylinder Plasticity .....	74
VNS10: Two-Bar Assembly Plasticity .....	77
VNS11: Rigid Punch Plasticity .....	84
VNS12: Axisymmetric Thick Cylinder .....	87
VNS13: Nonlinear Equation Solution Test - Overlay Model .....	88
VNS14: Square Plate Under Uniform Pressure.....	90
VNS15: Large Deflection Analysis of a Curved Cantilever .....	92
VNS16: Toggle Mechanism.....	94
VNS17: Beam With Gap Lift-Off .....	95
VNS18: Large Deflection of a Uniformly Loaded Plate .....	96
VNS19: Large Deflection Eccentric Compression of a Slender Column .....	97
VNS20: Large Deflection of Rectangular Plate With Line Load .....	98
VNS21: Hinged Cylindrical Shell .....	100
VNS22: Propped Cantilever With Gap Beam .....	101
VNS23: Belt Through a Pulley.....	103
VNS24: Elastoplastic Analysis of a Cantilever Bar.....	105
VNS25: Takeup Mechanism Under Alternating Load .....	107
VNS26: Cylindrical Hole in an Infinite Mohr-Coulomb Medium .....	108
VNS27: Strip Footing on a Mohr-Coulomb Material .....	111
VNS28: Plastic Flow in a Punch .....	113
VNS29: Large Displacement and Large Strain Analysis of a Rubber Sheet .....	115
VNS30: Stretching of a Square Membrane .....	116
VNS31: Shallow Spherical Shell Under Normal Pressure.....	119
VNS32: Equiaxial Tension of a Square Membrane .....	121
VNS33: Uniaxial Extension of a Rectangular Block .....	123
VNS34: Rubber Cylinder Under Internal Pressure .....	125
VNS35: Rubber Cylinder Pressed Between Two Plates .....	127
VNS36: Footing on Clay .....	129

VNS37: Footing in Sand.....	131
VNS38: Footing on Sand .....	133
References.....	135

## **CHAPTER 4.....137**

### **Natural Frequency.....137**

VNF1: Pin-Ended Cross - In-Plane Vibration.....	139
VNF2: Pin-Ended Double Cross - In-Plane Vibration.....	140
VNF3: Free Square Frame - In-Plane Vibration.....	141
VNF4: Cantilever With Off Centre Point Masses .....	142
VNF5: Deep Simply Supported Beam.....	143
VNF6: Free Circular Ring.....	144
VNF7: Thin Square Cantilevered Plate - Symmetric Modes .....	145
VNF8: Thin Square Cantilevered Plate - Anti-Symmetric Modes.....	146
VNF9: Free Thin Square Plate.....	147
VNF10: Simply Supported Thin Square Plate.....	148
VNF11: Simply Supported Thin Annular Plate .....	149
VNF12: Clamped Thin Rhombic Plate .....	150
VNF13: Cantilevered Thin Square Plate .....	151
VNF14: Simply Supported Thick Square Plate – Part A .....	154
VNF15: Simply Supported Thick Square Plate – Part B .....	156
VNF16: Clamped Thick Rhombic Plate.....	157
VNF17: Simply Supported Thick Annular Plate .....	158
VNF18: Cantilevered Square Membrane.....	159
VNF19: Cantilevered Tapered Membrane .....	160
VNF20: Free Annular Membrane .....	161
VNF21: Free Cylinder Axisymmetric Vibration.....	162
VNF22: Thick Hollow Sphere - Uniform Radial Vibration.....	163
VNF23: Deep Simply Supported 'Solid' Beam .....	164
VNF24: Simply Supported 'Solid' Square Plate .....	166
VNF25: Simply Supported Solid Annular Plate - Axisymmetric Vibration .....	168
VNF26: Badly Conditioned Cantilever Beam .....	170
VNF27: Lateral Vibration of a Stretched Circular Membrane.....	171
VNF28: Lateral Vibration of a Stretched String.....	173
VNF29: Torsional Vibration of a Shaft With Three Disks .....	174
VNF30: Cantilever With Balanced Off-Centre Point Masses .....	176
VNF31: Natural Frequency of a Motor Generator.....	177
VNF32: Torsional Frequencies of a Drill Pipe .....	178
VNF33: Cantilever Beam on an Elastic Support .....	179
References.....	180

## **CHAPTER 5.....181**

### **Harmonic Response .....181**

VHR1: Deep Simply Supported Beam Under Distributed Load .....	183
VHR2: Simply Supported Thin Square Plate .....	184



VHR3: Simply Supported Thick Square Plate .....	186
VHR4: Spring Mass System .....	188
VHR5: Harmonic Response of a Simply Supported Beam .....	190
References .....	192
<b>CHAPTER 6 .....</b>	<b>193</b>
<b>Spectral Response .....</b>	<b>193</b>
VSR1: Seismic Response of a Simply Supported Beam .....	195
VSR2: Earthquake Response of a Three Storey Building .....	196
VSR3: Earthquake Response of a Simple Frame .....	197
VSR4: Antenna Subjected to Wind Load .....	198
VSR5: Column Under Base Excitation .....	200
VSR6: Rigid Slab Subject to a Base Acceleration .....	201
References .....	202
<b>CHAPTER 7 .....</b>	<b>203</b>
<b>Linear Transient Dynamic .....</b>	<b>203</b>
VLT1: Deep Simply Supported Beam Under Distributed Load .....	205
VLT2: Simply Supported Thin Square Plate .....	207
VLT3: Simply Supported Thick Square Plate .....	208
VLT4: Transient Response of Spring to a Step Excitation .....	209
VLT5: Response of a Cantilever Beam to an Impulse .....	211
VLT6: Displacement Propagation Along a Bar With Free Ends .....	212
References .....	213
<b>CHAPTER 8 .....</b>	<b>215</b>
<b>Nonlinear Transient Dynamic .....</b>	<b>215</b>
VNT1: Shallow Spherical Cap With a Concentrated Apex Load .....	217
VNT2: Weight Bouncing on an Elastic Platform .....	219
VNT3: Simply Supported Beam with Restrained Motion .....	221
VNT4: Large Lateral Deflection of Unequal Stiffness Springs .....	223
VNT5: Large Rotation of a Swinging Pendulum .....	225
VNT6: Large Rotation of a Beam Pinned at One End .....	226
References .....	227
<b>CHAPTER 9 .....</b>	<b>229</b>
<b>Steady State Heat Transfer .....</b>	<b>229</b>
VSH1: 1D Heat Transfer with Radiation .....	231
VSH2: 2D Heat Transfer with Convection .....	232
VSH3: 2D Steady State Heat Conduction and Convection .....	233
VSH4: Steady State Heat Transfer in a Solid Steel Billet .....	234
VSH5: Steady State Heat Transfer through Building Corner .....	235

---

References.....	238
<b>CHAPTER 10.....</b>	<b>239</b>
<b>Transient Heat Transfer .....</b>	<b>239</b>
VTH1: 1D Transient Heat Transfer .....	241
VTH2: 2D Transient Heat Conduction and Convection.....	242
VTH3: Transient Heat Conduction with Heat Generation .....	243
VTH4: Axisymmetric Transient Heat Conduction and Convection.....	244
References.....	245
<b>INDEX.....</b>	<b>247</b>



---

## CHAPTER 1

# Linear Static



# VLS1: Elliptic Membrane

Source: Reference 1 (Test LE1)  
 Elements: All 2D plane stress, 3D membrane and plate/shell elements  
 Attributes: Plate edge pressure  
 Keywords: Elliptic membrane

An elliptical plate with an elliptical hole is analysed. Uniform outward pressure is applied at the outer boundary. As both the structure and the loading condition are symmetric, only a quarter of the structure is modelled.

Material data:

Young's modulus  $E = 210 \times 10^3 \text{ MPa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$

Load data:

Uniform pressure of 10 MPa at edge BC

Target value:

Tangential edge stress at point D  $\sigma_{\theta\theta} = 92.7 \text{ MPa}$

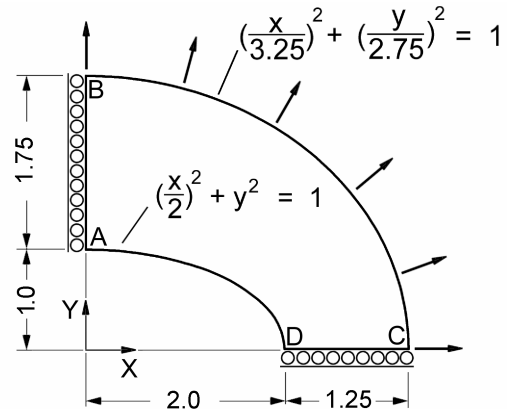


Figure VLS1: Problem sketch

Element Type	Coarse Mesh (2×3)	Fine Mesh (4×6)	Refined Mesh (8×12)
TRI3 -			
Plate Shell	50.62	72.26 (-22%)	85.91 (-7.3%)
Plane Stress	50.62 (-45%)	72.26	85.91
Membrane	50.62	72.26	85.91
QUAD4 -			
Plate Shell	70.07 (-24%)	84.74 (-8.6%)	91.79 (-1.0%)
Plane Stress	65.73 (-29%)	81.71 (-12%)	89.81 (-3.1%)
Membrane	69.83 (-25%)	85.35 (-7.9%)	92.00 (-0.8%)
TRI6 -			
Plate Shell	82.09 (-11%)	90.66 (-2.2%)	
Plane Stress	86.88 (-6.3%)	93.27 (+0.61%)	
Membrane	86.88	93.27	
QUAD8 -			
Plate Shell	85.59 (-7.7%)	91.53 (-1.3%)	
Plane Stress	85.59	91.53	
Membrane	85.59	91.53	
QUAD9 -			
Plate Shell	85.53 (-7.7%)	91.59 (-1.2%)	
Plane Stress	85.53	91.59	
Membrane	85.53	91.59	

Table VLS1: Stress result summary

# VLS2: Cylindrical Shell Patch Test

Source: Reference 1 (Test LE2)  
 Elements: 8- and 9-noded plate/shell elements  
 Attributes: Plate face pressure, plate edge pressure  
 Keywords: Patch test

Part of a cylindrical shell is analysed. Two loading conditions are considered: pure bending and pure membrane stretching. The mesh is designed so that the elements are warped (i.e. the four corner nodes are not coplanar).

Material data:  
 Young's modulus  $E = 210 \times 10^3 \text{ MPa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$

Geometry data:  
 Radius  $R = 1.0 \text{ m}$   
 Thickness  $t = 0.01 \text{ m}$

Load data:  
 Load case 1 (pure bending) -  
 edge moment on DC of  $1.0 \text{ KNm/m}$   
 Load case 2 (membrane stretching) -  
 normal pressure of  $0.6 \text{ MPa}$  and tangential  
 normal pressure on edge DC of  $60.0 \text{ MPa}$

Target value:  
 Outer surface tangential stress at point E =  $60.0 \text{ MPa}$

Straus7 results are obtained by graphing the stress distribution. This gives the averaged value at the point.

Element Type	Coarse Mesh (2x2)	Fine Mesh (4x4)
QUAD8	54.0 (-10.0%)	59.5 (-0.8%)
QUAD9	56.0 (-6.7%)	59.4 (-1.0%)

Table VLS2-1: Stress result summary for pure bending

Element Type	Coarse Mesh (2x2)	Fine Mesh (4x4)
QUAD8	70.0 (+16.7%)	62.8 (+4.6%)
QUAD9	57.5 (-4.2%)	60.6 (+1.0%)

Table VLS2-2: Stress result summary for membrane stretching

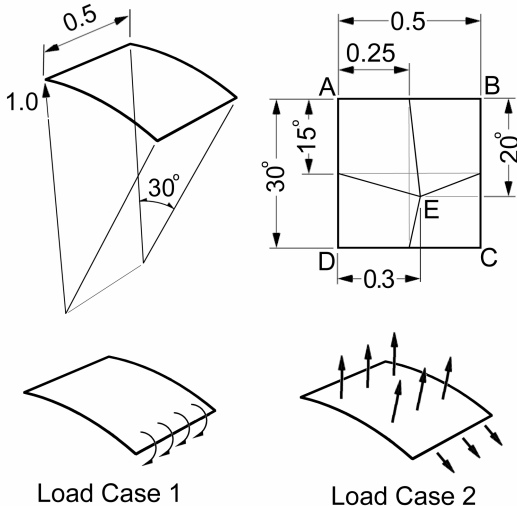


Figure VLS2: Problem sketch

## VLS3: Hemisphere Under Point Loads

Source: Reference 1 (Test LE3)  
 Elements: All plate/shell elements  
 Keywords: Hemispherical shell, membrane locking

A hemispherical shell subject to radial loads at the free edge is analysed. A quarter of the shell is modelled with various shell elements.

Material data:

Young's modulus  $E = 68.25 \times 10^3 \text{ MPa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$

Geometry data:

Radius  $R = 10.0 \text{ m}$   
 Thickness  $t = 0.04 \text{ m}$

Target value:

X displacement at point A =  $0.185 \text{ m}$

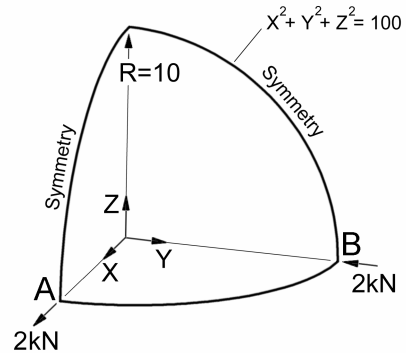


Figure VLS3: Problem sketch

In the coarse mesh, 9 nodes (i.e. four quadratic elements) are used per side, while in the fine mesh, 17 nodes (i.e. eight quadratic elements) are used.

Element Type	Coarse Mesh (9 nodes per side)		Fine Mesh (17 nodes per side)	
TRI3 <sup>1)</sup>	0.1819	(-1.7%)	0.1821	(-1.6%)
QUAD4	0.1866	(+0.9%)	0.1848	(-0.1%)
TRI6 <sup>1)</sup>	0.02201	(-88%)	0.09905	(-46%)
QUAD8	0.09581	(-48%)	0.1733	(-6.3%)
QUAD9	0.09493	(-49%)	0.1731	(-6.4%)

Table VLS3: Displacement result summary (m)

The quadratic elements suffer from mild “membrane-locking”, but with the fine mesh, they give reasonable results.

<sup>1)</sup> The averaged magnitudes of the radial displacements at points A and B are reported.



## VLS4: Z-Section Cantilever

Source: Reference 1 (Test LE5)  
 Elements: All plate/shell elements  
 Keywords: Z-section cantilever, pure torque

A Z-section cantilever is subjected to pure torque at the free end.

Material data:

Young's modulus  $E = 210 \times 10^3 \text{ MPa}$

Poisson's ratio  $\nu = 0.3$

Geometry data:

Shell thickness  $t = 0.1 \text{ m}$

Load data:

Load on each edge  $S = 0.6 \text{ MN}$

Target value:

Axial stress at mid-surface, point A =  $-108 \text{ MPa}$

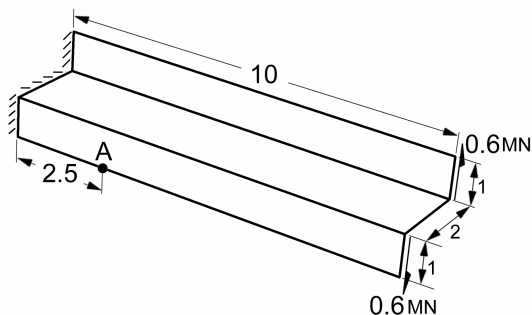


Figure VLS4: Problem sketch

In the coarse mesh, 8 subdivisions are used in the axial direction and one element is used for the two flanges and the web in the lateral direction. The refined mesh is obtained by reducing the element size by half. The results in the table are obtained by graphing the stress distribution along the edge. This gives the averaged value at the point.

Element Type	Coarse Mesh	Fine Mesh
TRI3	-29.6 (-73%)	-68.1 (-37%)
QUAD4	-115.4 (+6.9%)	-112.7 (+4.4%)
TRI6	-112.2 (+3.9%)	-110.7 (+2.5%)
QUAD8	-110.2 (+2.0%)	-110.2 (+2.0%)
QUAD9	-109.8 (+1.7%)	-110.1 (+1.9%)

Table VLS4: Stress result summary (MPa)

## VLS5: Skew Plate Under Normal Pressure

Source: Reference 1 (Test LE6)  
 Elements: All plate/shell elements  
 Keywords: Skew plate, normal pressure

A skew plate is subjected to a uniform normal pressure. The four edges are simply supported.

Material data:

Young's modulus  $E = 210 \times 10^3 \text{ MPa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$

Geometry data:

Thickness of the plate  $t = 0.01 \text{ m}$

Load data:

Uniform surface pressure of  $-700 \text{ Pa}$  in Z-direction

Target value:

Maximum principal stress on the lower surface at the plate centre (point E) =  $0.802 \text{ MPa}$

Straus7 results are obtained by graphing the stress distribution along the longer diagonal. This gives the averaged value at the point.

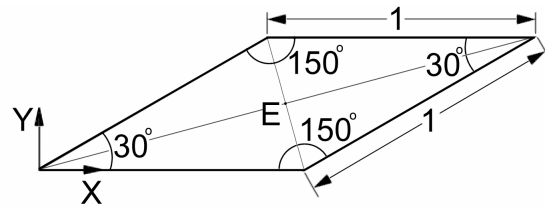


Figure VLS5: Problem sketch

Element Type	Coarse Mesh (2x2)	Fine Mesh (4x4)	Refined Mesh (8x8)
TRI3 <sup>NC</sup>	0.560 (-30%)	0.832 (+3.7%)	0.807 (+0.6%)
TRI3	0.736 (-8.2%)	0.885 (+10%)	0.819 (+2.1%)
QUAD4	1.625 (+103%)	1.000 (+25%)	0.873 (+8.9%)
TRI6	0.865 (+7.9%)	0.890 (+11%)	0.824 (+2.7%)
QUAD8	0.689 (-14%)	0.772 (-3.7%)	0.776 (-3.2%)
QUAD9	1.055 (+31%)	0.791 (-1.4%)	0.789 (-1.6%)

Table VLS5: Stress result summary (MPa)  
 (NC: non-consistent element load vector is used)

## VLS6: Thick Plate Under Pressure

Source: Reference 1 (Test LE10)  
 Elements: 3D solid elements  
 Keywords: Elliptical plate, brick surface pressure, non-consistent element load

An elliptical plate is subjected to a uniform pressure on one surface and the stress distribution is determined. Brick elements are used.

Material data:

Young's modulus  $E = 210 \times 10^3 \text{ MPa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$

Load data:

Pressure on the upper surface of  $1.0 \text{ MPa}$

Target value:

Vertical stress at point D  $\sigma_{YY} = 5.38 \text{ MPa}$

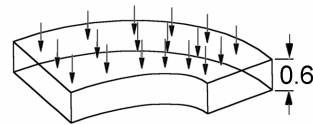
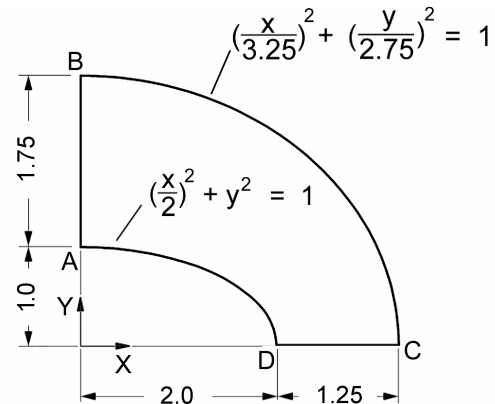


Figure VLS6: Problem sketch

Element Type	Coarse Mesh 3x2x2	Fine Mesh 6x4x2
TETRA4	-1.609 (-70%)	-3.013 (-44%)
TETRA10	-5.440 (+1.1%)	-5.500 (+2.2%)
WEDGE6	-4.599 (-15%)	-5.687 (+5.7%)
WEDGE15	-5.696 (+5.9%)	-5.956 (+11%)
HEXA8	-6.375 (+18%)	-5.985 (+11%)
HEXA16	-5.583 (+3.8%)	-5.769 (+7.2%)
HEXA20	-5.411 (+0.6%)	-5.693 (+5.8%)

Table VLS6: Stress result summary

## VLS7: Solid Cylinder / Taper / Sphere Under Thermal Loading

Source: Reference 1 (Test LE11)  
 Elements: All 3D brick elements  
 Keywords: Cylindrical structure, thermal load, temperature distribution

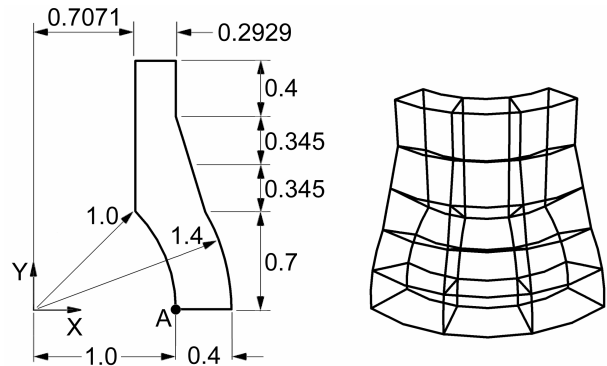
A solid cylindrical structure under thermal loading is analysed.

Material data:

Young's modulus  $E = 210 \times 10^3 \text{ MPa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$   
 Thermal expansion coefficient  
 $\alpha = 2.3 \times 10^{-4} / ^\circ\text{C}$

Load data:

Thermal load due to temperature change  
 specified by  $T = \sqrt{x^2 + y^2} + z$



Target value:

Direct stress at point A  $\sigma_{YY} = -105 \text{ MPa}$

Figure VLS7: Problem sketch

Straus7 results are obtained by graphing the stress distribution. This gives the averaged value at the point.

Element Type	Coarse Mesh (5x1x3)	Fine Mesh (10x2x6)
TETRA4	-74.97 (-29%)	-95.37 (-3.6%)
TETRA10	-99.09 (-5.6%)	-106.47 (0.67%)
WEDGE6	-19.48 (-81%)	-75.73 (-28%)
WEDGE15	-88.87 (-15%)	-103.06 (-1.8%)
HEXA8	-93.23 (-11%)	-99.28 (-5.4%)
HEXA16	-90.51 (-14%)	-98.88 (-5.8%)
HEXA20	-93.87 (-11%)	-99.87 (-4.9%)

Table VLS7: Stress result summary (MPa)

# VLS8: Circular Membrane - Edge Pressure

Source: References 2 and 3 (Test 5)  
 Elements: 2D plane stress, 3D membrane and plate/shell elements  
 Attributes: Nodal restraint in UCS  
 Keywords: Ring, User-defined Coordinate System (UCS), edge pressure

A ring under uniform external pressure of 100 MPa is analysed. One eighth of the ring is modelled via nodal restraints in a UCS. All plane stress, plate/shell and three-dimensional membrane elements are used.

Material data:  
 Young's modulus  $E = 210 \times 10^3 \text{ MPa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$

Geometry data:  
 Inner radius  $R_i = 10.0 \text{ m}$   
 Outer radius  $R_o = 11.0 \text{ m}$   
 Thickness  $t = 1.0 \text{ m}$

Target value:  
 Direct Stress at point D  $\sigma_{YY} = -1150 \text{ MPa}$

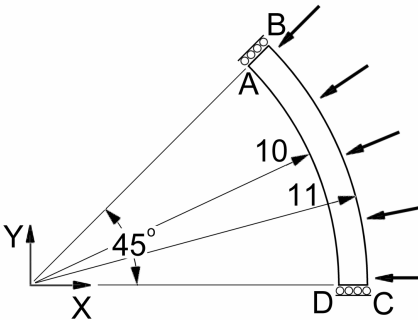


Figure VLS8: Problem sketch

Element	Coarse Mesh (4 × 1)	Fine Mesh (8 × 2)
TRI3 –		
Plate/Shell	-1160 (+0.9%)	-1159 (+0.8%)
Plane Stress	-1160	-1159
3D Membrane	-1160	-1159
QUAD4 –		
Plate/Shell	-1168 (+1.6%)	-1161 (+1.0%)
Plane Stress	-1154 (+0.3%)	-1157 (+0.6%)
3D Membrane	-1168 (+1.6%)	-1161 (+1.0%)
TRI6 –		
Plate/Shell	-1151 (+0.1%)	-1154 (+0.3%)
Plane Stress	-1153 (+0.3%)	-1153 (+0.3%)
3D Membrane	-1153 (+0.3%)	-1153
QUAD8 –		
Plate/Shell	-1158 (+0.7%)	-1153 (+0.3%)
Plane Stress	-1158	-1153
3D Membrane	-1158	-1153
QUAD9 –		
Plate/Shell	-1158 (+0.70%)	-1153 (+0.3%)
Plane Stress	-1158	-1153
3D Membrane	-1158	-1153

Table VLS8: Stress result summary (MPa)

## VLS9: Circular Membrane - Point Load

Source: References 2 and 3 (Test 6)  
 Elements: 2D plane stress, 3D membrane and plate/shell elements  
 Attributes: Nodal restraint in UCS  
 Keywords: Ring, User-defined Coordinate System (UCS)

A ring under concentrated forces is analysed. One eighth of the ring is modelled via nodal restraints in a UCS. All plane stress, plate/shell and three-dimensional membrane elements are used.

Material data:

Young's modulus  $E = 210 \times 10^3 \text{ MPa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$

Geometry data:

Inner radius  $R_i = 10.0 \text{ m}$   
 Outer radius  $R_o = 11.0 \text{ m}$   
 Thickness  $t = 1.0 \text{ m}$

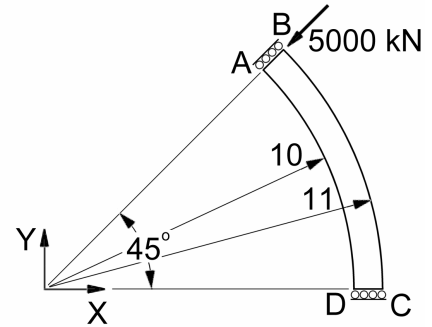


Figure VLS9: Problem sketch

Target value:

Direct stress at point D  $\sigma_{YY} = -53.2 \text{ MPa}$

Element	Coarse Mesh (4 × 1)	Fine Mesh (8 × 2)
TRI3 –		
Plate/Shell	-13.39 (-75%)	-24.17 (-55%)
Plane Stress	-13.39	-24.17
3D Membrane	-13.39	-24.17
QUAD4 –		
Plate/Shell	-25.76 (-52%)	-53.31 (+0.21%)
Plane Stress	-48.76 (-8.3%)	-52.16 (-2.0%)
3D Membrane	-25.76 (-52%)	-40.60 (-24%)
TRI6 –		
Plate/Shell	-46.69 (-12%)	-53.99 (+1.5%)
Plane Stress	-50.25 (-5.5%)	-53.03 (-0.32%)
3D Membrane	-50.25	-53.03
QUAD8 –		
Plate/Shell	-50.88 (-4.4%)	-53.07 (-0.24%)
Plane Stress	-50.88	-53.07
3D Membrane	-50.88	-53.07
QUAD9 –		
Plate/Shell	-50.86 (-4.4%)	-53.04 (-0.30%)
Plane Stress	-50.86	-53.04
3D Membrane	-50.86	-53.04

Table VLS9: Stress result summary (MPa)

## VLS10: Circular Membrane Parabolic Temperature

Source: References 2 and 3 (Test 7)  
 Elements: 2D plane stress, 3D membrane and plate/shell elements  
 Keywords: Circular membrane, thermal loading, parabolic temperature distribution

A circular membrane is subjected to a non-uniform temperature change. The inner and outer boundaries are fully fixed.

Material data:

Young's modulus  $E = 210 \times 10^3 \text{ MPa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$   
 Thermal expansion coefficient  $\alpha = 2.3 \times 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}$

Load data:

Thermal load due to a parabolic temperature change distribution in the radial direction  $\Delta T = 10(r-1)(2-r)$

Target value:

Direct stress at point D  $\sigma_{xx} = -115 \text{ MPa}$

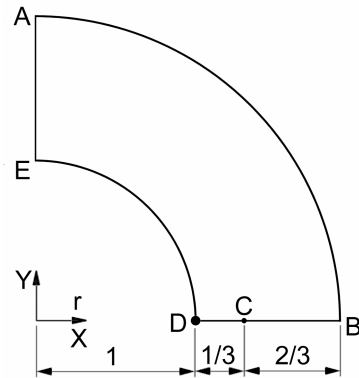


Figure VLS10: Problem sketch

Element	Coarse Mesh (4 × 2)	Fine Mesh (8 × 4)
TRI3 –		
Plate/Shell	-70.33 (-39%)	-94.36 (-18%)
Plane Stress	-70.33	-94.36
3D Membrane	-70.33	-94.36
QUAD4 –		
Plate/Shell	-76.67 (-33%)	-101.2 (-12%)
Plane Stress	-64.17 (-44%)	-98.69 (-14%)
3D Membrane	-76.67 (-33%)	-101.2 (-12%)
TRI6 –		
Plate/Shell	-111.0 (-4.3%)	-114.0 (-0.87%)
Plane Stress	-116.3 (+1.1%)	-115.4 (+0.35%)
3D Membrane	-116.3	-115.4
QUAD8 –		
Plate/Shell	-112.5 (-2.2%)	-114.2 (-0.70%)
Plane Stress	-112.5	-114.2
3D Membrane	-112.5	-114.2
QUAD9 –		
Plate/Shell	-112.4 (-2.3%)	-114.2 (-0.70%)
Plane Stress	-112.4	-114.2
3D Membrane	-112.4	-114.2

Table VLS10: Stress result summary (MPa)

## VLS11: Plate Patch Test

---

Source:	Reference 4 (Patch test for plates)
Elements:	All 2D plane stress, 2D plane strain, 3D membrane and plate/shell elements
Attribute:	Prescribed nodal displacement
Keywords:	Patch test, multiple freedom sets

---

The patch mesh is shown in Figure VLS11.  
All the units of the model data are assumed to be consistent, and therefore are not specified.

Material data:

$$\begin{aligned}\text{Young's modulus } E &= 1.0 \times 10^6 \\ \text{Poisson's ratio } \nu &= 0.25\end{aligned}$$

Two sets of tests are conducted for membrane and bending actions, respectively.

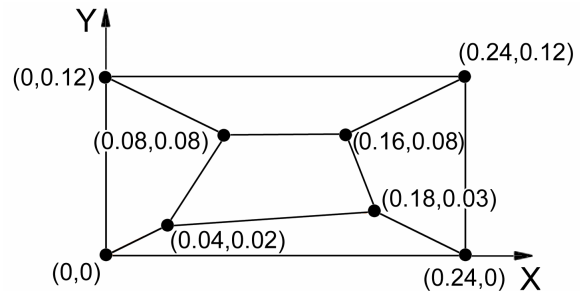


Figure VLS11: Problem sketch

(a) Membrane test

Boundary conditions:

Enforced displacements

$$D_X = 10^{-3} (X+Y/2)$$

$$D_Y = 10^{-3} (Y+X/2)$$

Strain distribution

$$\epsilon_X = \epsilon_Y = \gamma_{XY} = 10^{-3}$$

Stress distribution

$$\sigma_X = \sigma_Y = 1333; \tau_{XY} = 400 \text{ (all except for plane strain elements)}$$

$$\sigma_X = \sigma_Y = 1600; \tau_{XY} = 400 \text{ (plane strain elements)}$$

(b) Bending test

Boundary conditions:

Enforced displacements

$$D_Z = 10^{-3} (X^2 + XY + Y^2)/2$$

$$\theta_X = 10^{-3} (Y + X/2)$$

$$\theta_Y = -10^{-3} (X + Y/2)$$

Bending and twisting moments per unit length

$$M_X = M_Y = 1.111 \times 10^{-7}; M_{XY} = 3.333 \times 10^{-8}$$

Surface stress

$$\sigma_X = \sigma_Y = \pm 0.667; \tau_{XY} = \pm 0.200$$

Two freedom cases are defined for this model. To perform the tests, the appropriate case needs to be selected.

The membrane test has been conducted on all plane stress, plane strain, plate/shell and 3D membrane elements, and the bending test on the plate/shell elements only. All elements give exact results and hence pass the patch test.



## VLS12: Solid Patch Test

Source: Reference 4 (patch test for solids)  
 Elements: All 3D brick elements  
 Attribute: Prescribed nodal displacement  
 Keywords: Patch test

The patch mesh of a unit cube is shown in the figure. The coordinates of the nodes are given in Table VLS12. All units of model data are assumed to be consistent, and therefore are not specified.

Node	X	Y	Z
1	0.249	0.342	0.192
2	0.826	0.288	0.288
3	0.850	0.649	0.263
4	0.273	0.750	0.230
5	0.320	0.186	0.643
6	0.677	0.305	0.683
7	0.788	0.693	0.644
8	0.165	0.745	0.702

Table VLS12: Coordinates of internal nodes

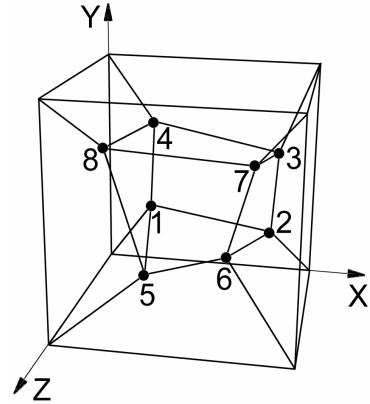


Figure VLS12: Problem sketch

Material data:

Young's modulus  $E = 1.0 \times 10^6$

Poisson's ratio  $\nu = 0.25$

The following expressions are used for the enforced displacements of all the nodes on the outer surface:

$$D_X = 10^{-3} (2X + Y + Z)/2$$

$$D_Y = 10^{-3} (X + 2Y + Z)/2$$

$$D_Z = 10^{-3} (X + Y + 2Z)/2$$

The target solution is

$$\epsilon_X = \epsilon_Y = \epsilon_Z = \gamma_{XY} = \gamma_{YZ} = \gamma_{ZX} = 10^{-3}$$

$$\sigma_X = \sigma_Y = \sigma_Z = 2000$$

$$\tau_{XY} = \tau_{YZ} = \tau_{ZX} = 400$$

The above mesh is used for all hexahedral elements. For tetrahedral and wedge elements, a different mesh is required to maintain compatibility between the elements.

All elements give exact results.

# VLS13: Straight Cantilever Beam

Source: Reference 4 (straight cantilever beam)  
 Elements: All plate/shell elements  
 Attributes: Plate edge pressure, plate edge shear, plate edge normal shear  
 Keywords: Mesh distortion

This test is used to check the shell elements' sensitivity to in-plane mesh distortion. Three different meshes are used: one regular mesh and two distorted meshes.

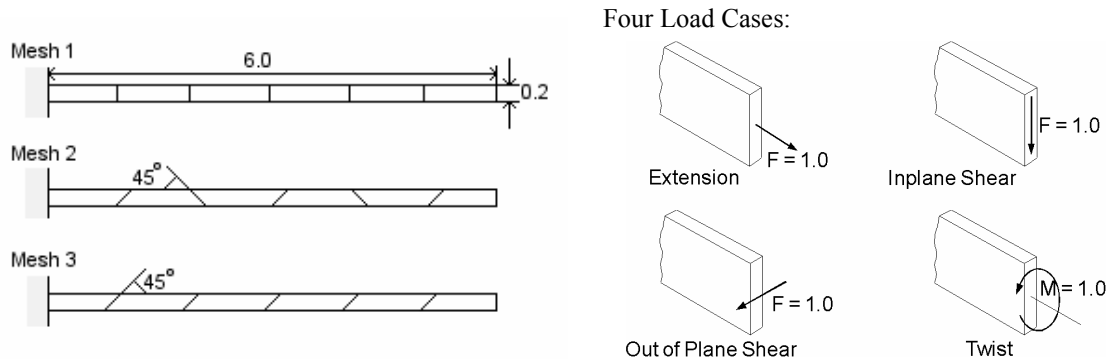


Figure VLS13: Problem sketch

All units of model data are assumed to be consistent, and therefore are not specified.

Material data:

Young's modulus  $E = 1.0 \times 10^7$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$   
 Thickness  $t = 0.1$

Element	Finite Element Solution			Theory
	Mesh 1	Mesh 2	Mesh 3	
Extension	Target value: horizontal displacement ( $\times 10^{-5}$ )			3.00E-5
TRI3	2.972 (-0.93%)	2.970 (-1.0%)	2.970 (-1.0%)	
QUAD4	2.986 (-0.47%)	2.965 (-1.2%)	2.960 (-1.3%)	
TRI6	2.992 (-0.27%)	2.961 (-1.3%)	2.992 (-0.27%)	
QUAD8	2.994 (-0.20%)	2.994 (-0.20%)	2.994 (-0.20%)	
QUAD9	2.994 (-0.20%)	2.994 (-0.20%)	2.994 (-0.20%)	
In-plane Shear	Target value: vertical displacement			0.1081
TRI3	0.003418 (-97%)	0.001615 (-98%)	0.001226 (-99%)	
QUAD4	0.09768 (-9.6%)	0.005360 (-95%)	0.05990 (-45%)	
TRI6	0.1063 (-1.7%)	0.07097 (-34%)	0.1029 (-4.8%)	
QUAD8	0.1062 (-1.8%)	0.09715 (-10%)	0.1059 (-2.0%)	
QUAD9	0.1070 (-1.0%)	0.1061 (-1.9%)	0.1061 (-1.9%)	

*Table VLS13: Result summary for displacement at the free end*

	Finite Element Solution						Theory
Element	Mesh 1		Mesh 2		Mesh 3		
Out-of-plane Shear	Target value: out-of-plane displacement						0.4321
TRI3	0.4214	(-2.5%)	0.4203	(-2.7%)	0.4194	(-2.9%)	
QUAD4	0.4263	(-1.3%)	0.4266	(-1.3%)	0.4266	(-1.3%)	
TRI6	0.4287	(-0.79%)	0.4285	(-0.83%)	0.4283	(-0.88%)	
QUAD8	0.4296	(-0.58%)	0.4296	(-0.58%)	0.4296	(-0.58%)	
QUAD9	0.4296	(-0.58%)	0.4296	(-0.58%)	0.4296	(-0.58%)	
Twist	Target value: twist rotation (degrees)						1.839
TRI3	1.021	(-44%)	1.079	(-41%)	1.084	(-41%)	
QUAD4	1.339	(-27%)	1.338	(-27%)	1.338	(-27%)	
TRI6	1.590	(-13%)	1.552	(-16%)	1.540	(-16%)	
QUAD8	1.737	(-5.5%)	1.723	(-6.3%)	1.639	(-11%)	
QUAD9	1.737	(-5.5%)	1.738	(-5.5%)	1.738	(-5.5%)	

*Table VLS13: Result summary for displacement at the free end (continued)*

Note: When the results for all the nodes at the free end are not the same, the value with the largest relative difference from the target value is listed in the table.

## VLS14: Twisted Beam

Source: Reference 4 (Twisted beam)  
 Elements: All plate/shell elements  
 Attributes: Plate edge shear, plate edge normal shear  
 Keywords: Twisted beam, mesh distortion

This test checks the behaviour of the plate/shell elements when they are warped. Each line of nodes across the beam is rotated 7.5 degrees in the 2×12 mesh, giving a 90 degree twist from the fixed end to the free end. The quadrilateral elements are therefore warped, since all four nodes do not lie on a common plane. All the units of the model data are assumed to be consistent, and therefore are not specified.

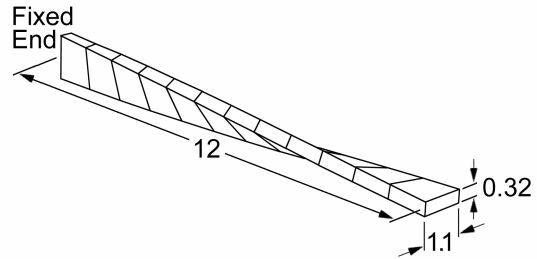


Figure VLS14: Problem sketch

### Material data:

Young's modulus  $E = 29 \times 10^6$   
 Poisson's Ratio  $\nu = 0.22$

### Load data:

In-plane shear unit force at the free end parallel with the edge  
 Out-of-plane unit force at the free end normal to the edge

### Target values:

Deflections of the tip, at the middle node, in the direction of the applied loads listed in Table VLS14.

Element	In-plane loading	Out-of-plane loading
Target value	$5.41 \times 10^{-3}$	$1.75 \times 10^{-3}$
TRI3	$5.312 \times 10^{-3}$ (-1.8%)	$1.462 \times 10^{-3}$ (-16%)
TRI3 – Refined	$5.357 \times 10^{-3}$ (-1.0%)	$1.621 \times 10^{-3}$ (-7.3%)
QUAD4	$5.410 \times 10^{-3}$ (0.0%)	$1.766 \times 10^{-3}$ (+0.89%)
TRI6	$5.409 \times 10^{-3}$ (-0.02%)	$1.790 \times 10^{-3}$ (-2.2%)
QUAD8	$5.412 \times 10^{-3}$ (+0.04%)	$1.751 \times 10^{-3}$ (+0.06%)
QUAD9	$5.411 \times 10^{-3}$ (+0.02%)	$1.752 \times 10^{-3}$ (+0.09%)

Table VLS14: Displacement result summary

## VLS15: Curved Beam

Source: Reference 4 (Curved beam)  
 Elements: All plate/shell elements  
 Attributes: Plate edge shear, plate edge normal shear  
 Keywords: Curved beam, mesh distortion

A curved beam of a  $90^\circ$  arc is analysed. Two load cases are considered: unit in-plane and out-of-plane forces at the tip. All units of model data are assumed to be consistent, and therefore are not specified.

### Material data:

Young's modulus  $E = 1.0 \times 10^7$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.25$

### Geometry data:

Inner radius  $R_i = 4.12$   
 Outer radius  $R_o = 4.32$   
 Thickness  $t = 0.1$

### Load data:

In-plane shear unit force at the loaded end in the radial direction of the arc  
 Out-of-plane shear unit force at the loaded end perpendicular to the plane of the arc

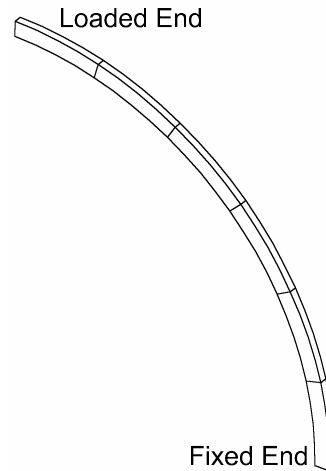


Figure VLS15: Problem sketch

### Target values:

Deflections of the tip, at the middle node, in the direction of the applied loads listed in Table VLS15.

Loading	In-plane shear	Out-of-plane shear
Target value	0.08734	0.5022
TRI3	0.008225 (-91%)	0.3776 (-25%)
QUAD4	0.08585 (-1.7%)	0.4516 (-10%)
TRI6	0.06862 (-21%)	0.4497 (-10%)
QUAD8	0.07698 (-12%)	0.4813 (-4.2%)
QUAD9	0.07724 (-12%)	0.4813 (-4.2%)

Table VLS15: Summary of deflection results

## VLS16: Rectangular Plate Under Normal Pressure

Source: Reference 4 (Rectangular plate under normal pressure)  
 Elements: All plate/shell elements  
 Attributes: Plate normal pressure  
 Keywords: Mesh distortion, multiple freedom sets

A rectangular plate is analysed for different plate aspect ratios, applied loads and boundary supports. All the units of the model data are assumed to be consistent, and therefore are not specified.

Material data:

Young's modulus  $E = 1.7472 \times 10^7$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$

Geometry data:

Dimension  $a = 2.0$  and  $b = 2.0$  or  $10.0$   
 Thickness  $t = 0.0001$

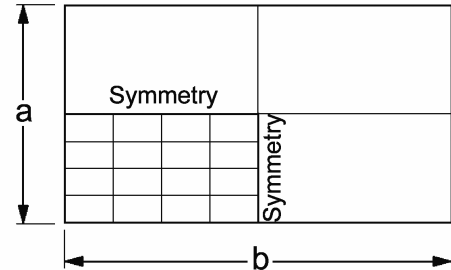


Figure VLS16: Problem sketch

Boundary support:

All four edges are clamped or simply supported

Load data:

Uniform pressure  $q = 10^{-4}$  or central lateral load  $p = 4.0 \times 10^{-4}$

Target values:

Deflections at the centre of plate

A quarter of the plate is modelled with  $4 \times 4$  meshes of various plate elements as shown in Figure VLS16.

	Aspect Ratio 1		Aspect Ratio 5	
Loading	Distributed	Concentrated	Distributed	Concentrated
Target value	1.26	5.60	2.56	7.23
TRI3	1.193 (-5.3%)	5.159 (-7.9%)	2.340 (-8.6%)	3.544 (-51%)
QUAD4	1.319 (+4.7%)	5.895 (+5.2%)	2.601 (+1.6%)	7.789 (+7.7%)
TRI6	1.113 (-12%)	4.875 (-13%)	2.450 (-4.3%)	2.911 (-60%)
QUAD8	1.266 (+0.48%)	5.604 (+0.07%)	2.836 (+11%)	6.485 (-10%)
QUAD9	1.266 (+0.48%)	5.607 (+0.13%)	2.604 (+1.7%)	7.138 (-1.3%)

Table VLS16-1: Result summary - clamped boundaries

	Aspect Ratio 1		Aspect Ratio 5	
Loading	Distributed	Concentrated	Distributed	Concentrated
Target value	4.062	11.60	12.97	16.96
TRI3	4.025 (-0.91%)	11.23 (-3.2%)	13.15 (+1.4%)	11.41 (-33%)
QUAD4	4.060 (-0.05%)	11.94 (+2.9%)	12.86 (-0.85%)	18.12 (+6.8%)
TRI6	3.976 (-2.1%)	11.04 (-4.8%)	13.41 (+3.4%)	9.571 (-44%)
QUAD8	4.062 (0.00%)	11.59 (-0.09%)	12.97 (0.00%)	16.83 (-0.77%)
QUAD9	4.063 (+0.02%)	11.59 (-0.09%)	12.97 (0.00%)	16.84 (-0.71%)

Table VLS16-2: Result summary - simply supported boundaries

## VLS17: Scordelis-Lo Roof

Source: Reference 4 (Scordelis-Lo roof)  
 Elements: All plate/shell elements  
 Keywords: Scordelis-Lo Roof, cylindrical shell

This is a widely used test problem. The elements in this problem are singularly curved into a cylindrical shape. Both membrane and bending actions contribute significantly to the response.

All nodes are permitted to move freely in all directions except those nodes that lie on a plane of symmetry or on the supported edge of the roof. Nodes lying along the two internal planes of symmetry are constrained so that they move only in accordance with the symmetry conditions. Nodes along the supported edge of the roof are stopped from moving in the XY-plane, although rotations are still permitted.

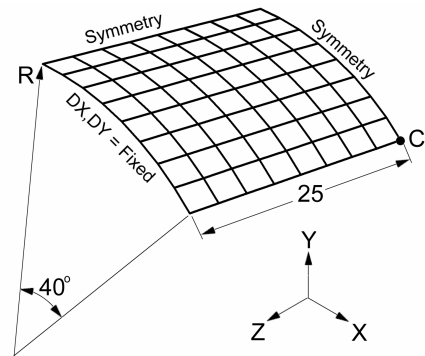


Figure VLS17: Problem sketch

All units of model data are assumed to be consistent, and therefore are not specified.

Material data:

Young's modulus  $E = 4.32 \times 10^8$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.0$

Geometry data:

Radius  $R = 25.0$   
 Thickness  $t = 0.25$

Load data:

Roof self-weight of 90 per unit area in -Y direction

Target result:

Y deflection at C = 0.3024

Mesh	TRI3	QUAD4	TRI6	QUAD8	QUAD9
5×5	0.2010 (-34%)	0.3169 (+4.8%)	0.1913 (-37%)	0.2751 (-9.0%)	0.2768 (-8.5%)
9×9	0.2581 (-15%)	0.3039 (+0.48%)	0.2900 (-4.1%)	0.3009 (-0.49%)	0.2991 (-1.1%)
17×17	0.2879 (-4.8%)	0.3013 (-0.36%)	0.3148 (4.1%)	0.3018 (-0.19%)	0.3009 (-0.5%)

Table VLS17: Result summary

Note: The number of nodal points used in the two directions measures the mesh density.



# VLS18: Thick-Walled Cylinder

Source:	Reference 4 (Thick walled cylinder)
Elements:	Plane strain and brick elements, and sector-symmetry links
Attributes:	Plate edge pressure, brick face pressure
Keywords:	Nearly incompressible material, locking due to incompressibility

This test checks the element behaviour when nearly incompressible material is used. All units of model data are assumed to be consistent and therefore are not specified.

Material data:	
Young's modulus	$E = 1000$
Poisson's ratio	$\nu = 0.49, 0.499, 0.4999$

Geometry data:	
Inner radius	$R_i = 3.0$
Outer radius	$R_o = 9.0$
Thickness	$t = 1.0$

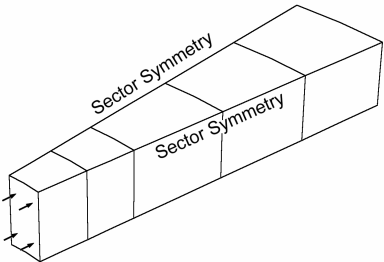


Figure VLS18: Problem sketch

Load data:	
	Unit pressure at the inner surface of the cylinder

Both plane strain and brick elements are used to model a 10° sector of the cylinder. A uniform pressure is applied to the inside of the cylinder.

Poisson's ratio	Normalised radial displacement								Target
	TRI3	QUAD4	TRI6	QUAD8/9	QUAD8/9*	HEXA8	HEXA20	HEXA20*	
$\nu = 0.49$	0.643	0.987	0.998	0.999	1.000	0.987	0.999	1.000	$5.0399 \times 10^{-3}$
$\nu = 0.499$	0.156	0.993	0.984	0.986	1.000	0.993	0.986	1.000	$5.0602 \times 10^{-3}$
$\nu = 0.4999$	0.018	1.067	0.861	0.879	1.000	1.067	0.879	1.000	$5.0623 \times 10^{-3}$

Table VLS18: Summary of results for radial displacement at the inner boundary ( $r=R_i$ )  
 (\* With reduced integration: 2x2 for QUAD8/9 and 2x2x2 for HEXA20)

It should be noted that the solution with the linear triangular element, TRI3, locks when Poisson's ratio approaches 0.5. With reduced integration, quadratic quadrilateral elements (QUAD8 and QUAD9) and the brick element (HEXA20) give excellent results.

## VLS19: Continuous Beam Under Linearly Distributed Load

Source: Reference 5 (Problem 6.27; page 103)  
 Elements: Beam element  
 Attributes: Beam linearly distributed load  
 Keywords: Continuous beam, shear force diagram, bending moment diagram

A continuous beam is subjected to a linearly distributed load and the shear force and bending moment diagrams are drawn.

Material data:

Young's modulus  $E = 210 \times 10^9 \text{ Pa}$

Geometry data:

Moment of area  $I = 0.01 \text{ m}^4$

Area of cross section  $A = 0.01 \text{ m}^2$

As the shear force and bending moment diagrams are independent of the above-specified values, other non-zero values can also be used with no effect on the resulting diagrams.

Straus7 gives the exact results, and the diagrams are shown in Figure VLS19.

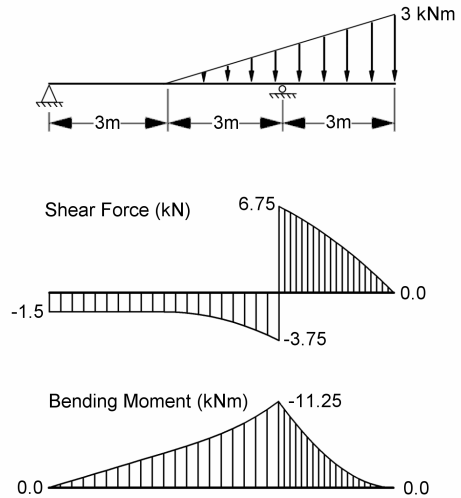


Figure VLS19: Problem sketch and results

# VLS20: Rigid Beam Supported by Wires

Source: Reference 5 (Problem 2.22; Page 37)  
Elements: Truss and cable elements, rigid link  
Keywords: Rigid beam, wire

A rigid beam is hinge-supported at one end, and at the centre and the other end by two wires. The forces in the wires are determined.

The rigid beam is modelled with two rigid links and the two wires are modelled with either truss or cable elements.

All units of model data are assumed to be consistent, and therefore are not specified.

Material data:  
Young's modulus  $E = 1.0 \times 10^{10}$

Geometry data:  
Height  $H = 1.0$   
Length  $L = 1.0$   
Wire 1 diameter  $D_1 = 0.015$   
Wire 2 diameter  $D_2 = 0.01$

Load data:  
Vertical load  $P = 1000.0$

Analytical solutions for the forces in the wires:

$$F_1 = \frac{2P}{(4HA_2L_1^2 / A_1L_2^3) + H / L_1}$$
$$F_2 = \frac{2P}{(HA_1L_2^2 / 2A_2L_1^3) + 2H / L_2}$$

	Target (exact)	Straus7	
Force in wire 1	1950.98	1950.98	(0.00%)
Force in wire 2	693.68	693.68	(0.00%)

Table VLS20: Result summary

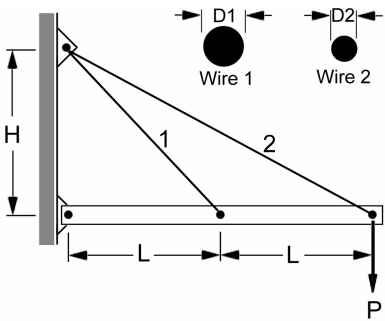


Figure VLS20: Problem sketch

## VLS21: Built-in Beam Thermal Stress Problem

Source: Reference 6 (Example 9.20; page 261)  
 Elements: Truss and beam elements  
 Attributes: Node temperature  
 Keyword: Thermal loading

A temperature change  $\Delta T = -50^\circ\text{C}$  is applied to the three bars shown. The three bars have different cross section areas and material property constants, as summarised in Table VLS21-1. The displacements of points A and B, and stresses in the three bars are determined.

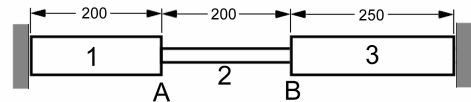


Figure VLS21: Problem sketch

Bar	Section Area ( $\text{mm}^2$ )	Modulus E (MPa)	Thermal expansion coefficient
1	300	100	$6 \times 10^{-6}$
2	200	200	$12 \times 10^{-6}$
3	300	70	$16 \times 10^{-6}$

Table VLS21-1: Cross section areas and material constants

Results	Target (Exact)	Truss Element	Beam Element
Axial force (N)	16121.21	16121.21	16121.21
Stress Bar 1 (MPa)	53.737	53.737	53.737
Stress Bar 2 (MPa)	80.606	80.606	80.606
Stress Bar 3 (MPa)	53.737	53.737	53.737
Displacement of Point A (mm)	0.0474747	0.0474747	0.0474747
Displacement of Point B (mm)	0.0080808	0.0080808	0.0080808

Table VLS21-2: Result summary

## VLS22: Tapered Cantilever Beam

Source: Reference 7  
 Elements: Truss and shear panel elements  
 Keywords: Mesh distortion, stringer

A tapered composite cantilever beam is fully fixed at the left end. The beam consists of a thin membrane and stringers. Shear panel elements are used to model the thin membrane, and truss elements are used for the stringers.

Material data:

Stringer Young's modulus  $E = 10 \times 10^6 \text{ psi}$   
 Membrane shear modulus  $G = 3.8 \times 10^6 \text{ psi}$   
 Membrane Poisson's ratio  $\nu = 0.315$

Geometry data:

Stringer section area  
      $0.15 \text{ in}^2$  for all inclined stringers  
      $0.08 \text{ in}^2$  for stringers BF and CG  
      $0.05 \text{ in}^2$  for stringer DH  
 Membrane thickness  $0.032 \text{ in}$

Load data:

1800 lb downward point force at point H

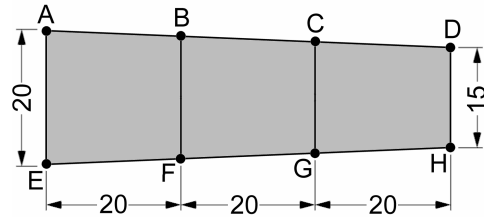


Figure VLS22: Problem sketch

	Analytical	Straus7	
Vertical deflection at G	0.265	0.2615	(-1.3%)
Shear in AEFB (psi)	2305	2310	(+0.2%)
Shear in BFGC (psi)	2762	2774	(+0.4%)
Shear in CGHD (psi)	3375	3394	(+0.6%)
Force in Bar AB (lb)	4666	4668	(+0.04%)
Force in Bar BC (lb)	3047	3046	(-0.03%)
Force in Bar CD (lb)	1081	1081	(0.00%)
Force in Bar BF (lb)	0	0	(0.00%)
Force in Bar CG (lb)	0	0	(0.00%)
Force in Bar DH (lb)	900	900	(0.00%)

Table VLS22: Result summary

# VLS23: Simply Supported Composite Beam

Source: Reference 7  
Elements: Truss and shear panel elements  
Keywords: Mesh distortion

Two simply supported composite beams with membrane and stringers are analysed. All of the membrane panels in the first beam are 6 in × 6 in squares. The second beam contains both square and trapezoidal panels, and its configuration can be obtained by moving nodes 7 and 12, 3 in to the right, and nodes 8 and 11, 3 in to the left. Other model data are:

Material data:

- Stringer Young’s modulus  $E = 10.5 \times 10^6 \text{ psi}$
- Membrane shear modulus  $G = 4.0 \times 10^6 \text{ psi}$
- Membrane Poisson’s ratio  $\nu = 0.315$

Geometry data:

- Stringer section area 0.4 in<sup>2</sup> for all horizontal stringers  
0.1 in<sup>2</sup> for vertical and inclined stringers
- Membrane thickness 0.05 in

Load data:

- $P = 10 \times 10^3 \text{ lb}$
- Case 1: downward force  $P$  at nodes 9 and 10
- Case 2: force  $P$  to the right at node 9 and force  $P$  to the left at node 10
- Case 3: force  $P$  to the right at nodes 17 and 18
- Case 4: downward force at nodes 5 and 13.

Target results are the horizontal and vertical deflection at node 10 ( $U_{10}$  and  $V_{10}$ ), shear stress in panel 5687, and forces in bars 57 and 79.

For the first beam with square panels, Straus7 gives identical results to MSC/NASTRAN and Chen [7]. For the second beam, Straus7 gives the same results as MSC/NASTRAN.

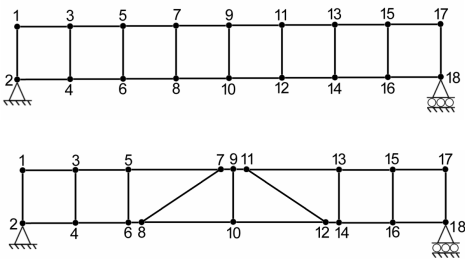


Figure VLS23: Problem sketch

	$U_{10} \text{ (in)}$	$V_{10} \text{ (in)}$	Shear in Plate 5687 (psi)	Force in Bar 57 (lb)	Force in Bar 79 (lb)
Load case 1	0.114	-0.814	33333	-25000	-35000
Load case 2	-0.014	0.000	4167	3125	4375
Load case 3	0.100	-0.114	4167	3125	4375
Load case 4	0.086	-0.529	0	-20000	-20000

Table VLS23-1: Result summary for the first composite beam

	Results	CHEN <sup>[7]</sup>	NASTRAN <sup>[7]</sup>	Straus7
Load case 1	$U_{10}$ (in)	0.114	0.129	0.129
	$V_{10}$ (in)	-0.811	-0.876	-0.876
	Shear in 5687 (psi)	33333	55556	55556
	Force in Bar 57 (lb)	-27500	-22500	-22500
	Force in Bar 79 (lb)	-37500	-32500	-32500
Load case 2	$U_{10}$ (in)	-0.014	-0.016	-0.016
	$V_{10}$ (in)	0.000	0.000	0.000
	Shear in 5687 (psi)	4167	6944	6944
	Force in Bar 57 (lb)	3438	2813	2813
	Force in Bar 79 (lb)	4688	4063	4063
Load case 3	$U_{10}$ (in)	0.100	0.098	0.098
	$V_{10}$ (in)	-0.114	-0.143	-0.143
	Shear in 5687 (psi)	4167	6944	6944
	Force in Bar 57 (lb)	3438	2813	2813
	Force in Bar 79 (lb)	4688	4063	4063
Load case 4	$U_{10}$ (in)	0.086	0.086	0.086
	$V_{10}$ (in)	-0.529	-0.529	-0.529
	Shear in 5687 (psi)	0	0	0
	Force in Bar 57 (lb)	-20000	-20000	-20000
	Force in Bar 79 (lb)	-20000	-20000	-20000

Table VLS23-2: Result summary for the second composite beam

## VLS24: Circular Clamped Plate Under Normal Pressure

Source: Classical solution (Page 55, Reference 8)  
 Elements: All plate/shell elements and sector symmetry link  
 Attributes: Plate normal pressure and plate face pressure  
 Keyword: Circular plate

A clamped circular plate is subjected to uniform surface pressure. As both the structure and the loading are symmetric, only a 10° sector of the plate is modelled. Sector symmetry links are used to enforce the symmetry conditions.

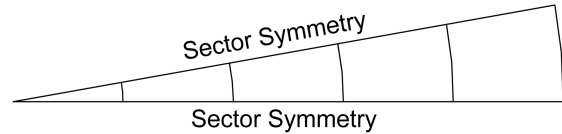


Figure VLS24: Problem sketch

At the plate centre, a triangular element is always used even for the quadrilateral meshes. For the QUAD4 mesh, a TRI3 is used at the centre in addition to 9 QUAD4 elements. For the QUAD8/QUAD9 meshes, a TRI6 element is used at the centre in addition to 4 QUAD8/QUAD9 elements.

Material data:

Young's modulus  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$

Geometry data:

Plate radius  $R = 1.0 \text{ m}$   
 Plate thickness  $T = 0.01 \text{ m}$

Load data:

Surface pressure  $P = 10,000 \text{ Pa}$

The analytical solution for maximum deflection at the plate centre:

$$w_{\max} = \frac{PR^4}{64D}$$

where  $D = Et^3 / [12(1 - \nu^2)]$ . Therefore, the reference solution is

$$w_{\max} = \frac{3}{16} (1 - \nu^2) \frac{PR^4}{Et^3} = 8.125 \times 10^{-3} \text{ (m)} = 8.125 \text{ mm}$$

Element	Straus7 (mm)	
TRI3	7.9910	(-1.65%)
QUAD4	8.1736	(0.60%)
TRI6	8.1280	(0.04%)
QUAD8	8.1321	(0.09%)
QUAD9	8.1322	(0.09%)

Table VLS24: Displacement result summary



## VLS25: Frame With Pin Connections

Source: Reference 9 (Sample Problem 6.5, page 233)  
 Elements: Beam elements and master/slave links  
 Attributes: Beam rotational end-release  
 Keywords: Frame structure and pin connection

A two-dimensional frame is analysed. All the frame members are connected with pins, and as a result, relative rotations between the members are allowed at the joints. The components of the forces acting on each member of the frame are determined.

All units of model data are assumed to be consistent, and therefore are not specified.

Material data:

Young's modulus  $E = 1.0$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.0$

Geometry data:

Section area  $A = 1.0$   
 Moments of inertia  $I_{11} = I_{22} = 1.0$

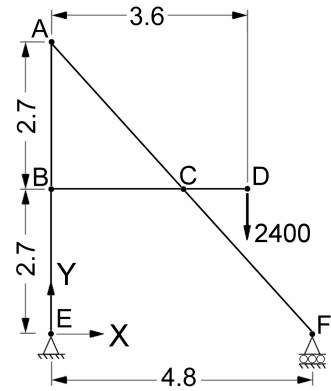


Figure VLS25: Problem sketch

It should be noted that, as the structure is statically determinate, the force distribution is independent of the element property data used.

All nodal deflections in the Z direction and rotations about the X and Y axes are restrained. At point E, deflections in X and Y directions are fixed and at point F, deflection in the Y direction is fixed.

Straus7 results are identical to the analytical solution. The table gives the force components between members connected at each point.

Force component	Value
$A_x$	0
$A_y$	1800
$B_x$	0
$B_y$	1200
$C_x$	0
$C_y$	3600
$E_x$	0
$E_y$	600
$F_x$	0
$F_y$	1800

Table VLS25: Result summary

## VLS26: Stretching of an Orthotropic Solid

---

Source	Reference 10 (VM145)
Elements	Brick element
Keywords:	Orthotropic material, material reference system

---

A cube of side  $L = 1.0$  in is subjected to distributed surface loads as shown in the figure. The material is assumed to be orthotropic and the material axes coincide with the global X, Y and Z axes.

Material data (in the material reference system):

$$\begin{aligned}
 E_1 &= 10 \times 10^6 \text{ psi} \\
 E_2 &= 20 \times 10^6 \text{ psi} \\
 E_3 &= 40 \times 10^6 \text{ psi} \\
 G_{12} &= G_{23} = G_{31} = 10 \times 10^6 \text{ psi} \\
 \nu_{12} &= 0.05 \\
 \nu_{23} &= 0.1 \\
 \nu_{31} &= 0.3
 \end{aligned}$$

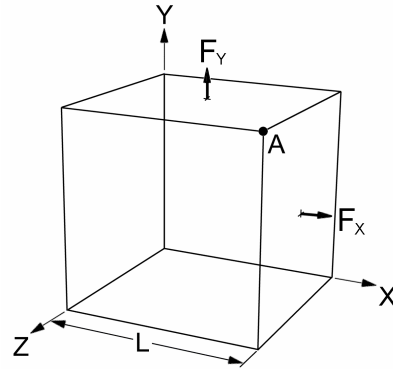


Figure VLS26: Problem sketch

Load data:

$$\begin{aligned}
 \text{Tension in X direction } F_X &= 100 \text{ lb} \\
 \text{Tension in Y direction } F_Y &= 200 \text{ lb}
 \end{aligned}$$

Target values:

Three displacement components of point A as listed in Table VLS26

Note that the Poisson's ratio  $\nu_{ij}$  is defined as the ratio between the lateral and axial strains for a uni-axial loading in i-direction, i.e.  $\nu_{ij} = -\epsilon_j / \epsilon_i$ .

The results are summarised in Table VLS26. As the cube is under constant strain deformation, the Straus7 results are exact as expected.

	Target	Straus7
X displacement	9.0	9.0
Y displacement	9.5	9.5
Z displacement	-1.75	-1.75

Table VLS26: Summary of displacement results ( $10^6$  in)

## VLS27: Rectangular Plate on Elastic Foundation

Source: Reference 11 (Page 37-38)  
 Elements: 4- and 9-noded plate/shell elements  
 Materials: User-defined plate  
 Attributes: Plate face support  
 Keywords: Elastic foundation, transverse shear deformation

A simply supported square plate on elastic foundation is subjected to a uniform pressure. All units of model data are assumed to be consistent, and therefore are not specified.

Material data:

Bending rigidity matrix

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & & \\ 0.3 & 1 & & \\ & & 0.35 & \\ & & & 0.35 \end{bmatrix}$$

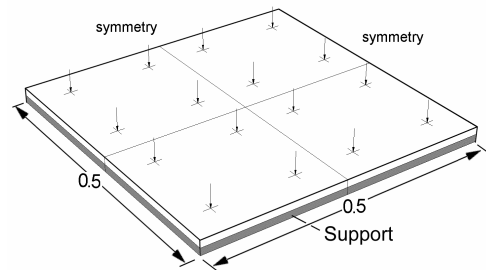


Figure VLS27: Problem sketch

Transverse rigidity  $K_{S1}=K_{S2}=3.5 \times 10^4$   
 Modulus for elastic foundation 64.0

Load data:

Unit face pressure

Geometry data:

Plate edge length  $L = 1.0$

Target value:

Deflection and bending moment at plate centroid:  $W_0 = 3.4776 \times 10^{-3}$  and  $M_0 = 4.0395 \times 10^{-2}$

Only a quarter of the plate is modelled in the analysis. The results with different mesh densities are presented in Table VLS27. Note that a large rigidity value is assigned to both directions so that the transverse shear deformation is ignored.

	QUAD4			QUAD9		
	2x2 mesh	4x4 mesh	8x8 mesh	2x2 mesh	4x4 mesh	8x8 mesh
$W_0$ (10-3)	3.5192 (1.19%)	3.4889 (0.32%)	3.4794 (0.05%)	3.4867 (0.26%)	3.4833 (0.16%)	3.4877 (0.29%)
$M_0$ (10-2)	4.2959 (6.35%)	4.0992 (1.48%)	4.0545 (0.37%)	4.3418 (7.48%)	4.1119 (1.79%)	4.0644 (0.62%)

Table VLS27: Result summary

## VLS28: Beam on Elastic Foundation

Source:	Classical solution
Elements:	Beam element
Attribute:	Beam support
Keywords:	Beam on elastic foundation (BEF), bending moment diagram, shear force diagram

A beam on an elastic foundation is subjected to a concentrated force at the left end. The beam deflection, bending moment and shear force are determined.

Material data:

Young's modulus for the beam	$E = 2.1 \times 10^{10} \text{ Pa}$
Modulus of support	$k = 10^7 \text{ N/m}^3$
Beam support constant	$k_s = k \cdot b = 10^7 \text{ Pa}$

Geometry data:

Beam length	$L = 28 \text{ m}$
Height of beam cross-section	$h = 2.0 \text{ m}$
Width of beam cross section	$b = 1.0 \text{ m}$

Load data:

Point force  $P = 1.2 \times 10^6 \text{ N}$

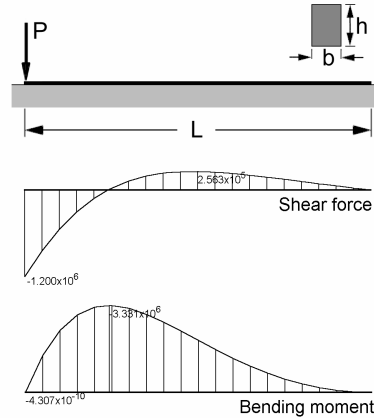


Figure VLS28: Problem sketch and result diagrams

A single beam element is used to model the beam. The solutions for deflection, shear force and bending moment are all the same as the analytical solution.

$x/L$	Deflection (mm)	Shear Force ( $10^6 \text{ N}$ )	Bending Moment ( $10^6 \text{ Nm}$ )
0.0	-27.8148	-1.2000	0.0000
0.1	-19.0998	-0.5450	-2.3859
0.2	-11.6509	-0.1183	-3.2658
0.3	-5.9880	0.1243	-3.2205
0.4	-2.1064	0.2337	-2.6940
0.5	0.2743	0.2563	-1.9925
0.6	1.5384	0.2288	-1.3053
0.7	2.0660	0.1770	-0.7338
0.8	2.1752	0.1169	-0.3216
0.9	2.0963	0.0569	-0.0788
1.0	1.9656	0.0000	0.0000

Table VLS28: Result summary

Deflection of the beam can be expressed in terms of unknown parameters  $C_i$

$$w(x) = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x)$$

where  $\beta$  is a parameter defined as

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k_s}{4EI}} = \sqrt[4]{\frac{1.0 \times 10^7}{4 \times 2.1 \times 10^{10} \times (1 \cdot 2^3 / 12)}} = 0.1156 \text{ (1 / m)}$$

and  $x$  is the coordinate along the axial direction  $0 \leq x \leq L$ . Note that the modulus of support is the product of the modulus of subgrade reaction and beam width.

The moment and transverse shear force distribution

$$M(x) = -ETw''(x) = 2EI\beta^2 \left[ e^{\beta x} (C_1 \sin \beta x - C_2 \cos \beta x) + e^{-\beta x} (-C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x) \right]$$

$$Q(x) = -ETw'''(x) = 2EI\beta^3 \left\{ e^{\beta x} [C_1 (\sin \beta x + \cos \beta x) + C_2 (\sin \beta x - \cos \beta x)] + e^{-\beta x} [C_3 (\sin \beta x - \cos \beta x) - C_4 (\sin \beta x + \cos \beta x)] \right\}$$

Using boundary conditions, we have

$$M(0) = 2EI\beta^2 (-C_2 + C_4) = 0$$

$$Q(0) = 2EI\beta^3 (C_1 - C_2 - C_3 - C_4) = -P$$

$$M(L) = 2EI\beta^2 \left[ e^{\beta L} (C_1 \sin \beta L - C_2 \cos \beta L) + e^{-\beta L} (-C_3 \sin \beta L + C_4 \cos \beta L) \right] = 0$$

$$Q(L) = 2EI\beta^3 \left\{ e^{\beta L} [C_1 (\sin \beta L + \cos \beta L) + C_2 (\sin \beta L - \cos \beta L)] + e^{-\beta L} [C_3 (\sin \beta L - \cos \beta L) - C_4 (\sin \beta L + \cos \beta L)] \right\} = 0$$

The solution to this linear equation system is

$$C_1 = 2.89747966501065 \times 10^{-11} \text{ P}$$

$$C_2 = -6.46638994551317 \times 10^{-13} \text{ P}$$

$$C_3 = 2.31500103704532 \times 10^{-8} \text{ P}$$

$$C_4 = C_2$$

Substituting these values into the expressions for deflection, bending moment and transverse shear force gives the analytical solution.

## VLS29: Pipe Under Combined Bending and Torsion

Source: Reference 10 (VM12)  
 Elements: Pipe element  
 Attribute: Beam offset  
 Keywords: Bending stress, torsional shear stress

A vertical solid pipe of length  $L$  is subjected to the action of a horizontal force  $F$  acting at a distance  $d$  from the axis of the bar. The maximum principal stresses in the pipe are determined

Material data:

Young's modulus  $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$

Geometry data:

Beam length  $L = 3000 \text{ in}$   
 Offset distance  $d = 36.0 \text{ in}$   
 External diameter  $D_o = 4.67017 \text{ in}$   
 Thickness  $t = 2.33508 \text{ in}$

Load data:

Point force  $F = 250 \text{ lb}$   
 Torque  $M = F \cdot d = 9000 \text{ lb-in}$

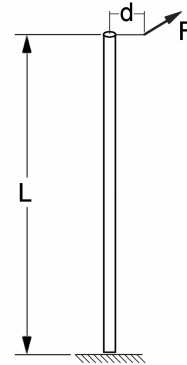


Figure VLS29: Problem sketch

Result	Target	Straus7
Maximum bending stress	7500.0	7500.0
Maximum torsional shear stress	450.0	450.0

Table VLS29: Result summary (psi)

# VLS30: Out-of-Plane Bending of a Curved Bar

Source: Reference 10 (VM18)  
Elements: Pipe element  
Attributes: Pipe radius  
Keywords: Bending stress, torsional shear stress

A portion of a horizontal circular ring, built in at one end, is loaded by a vertical load  $F$ , applied at the other end. The ring has a solid circular cross-section of diameter  $d$ . The deflection at the free end, the maximum bending stress and the maximum torsional shear stress are determined.

Material data:  
Young's modulus  $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$   
Poisson's ratio  $\nu = 0.3$

Geometry data:  
Ring radius  $R = 100 \text{ in}$   
Span angle  $\theta = 90^\circ$   
External diameter  $D_o = 2.0 \text{ in}$   
Thickness  $t = 1.0 \text{ in}$

Load data:  
Point force  $F = 50 \text{ lb}$

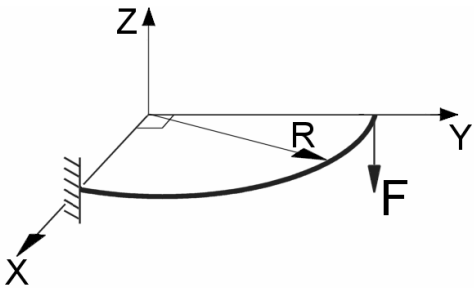


Figure VLS30: Problem sketch

One pipe element is used to model the curved beam and the results are summarised in Table VLS30.

Result	Target	Straus7
Deflection at free end ( <i>in</i> )	-2.648	-2.649
Maximum bending stress ( <i>psi</i> )	6366	6366
Maximum torsional shear stress ( <i>psi</i> )	-3183	-3183

Table VLS30: Result summary

# VLS31: Laminated strip under three-point bending

Source: Reference 12 (R0031/1)  
 Elements: Plate/shell and brick elements  
 Keywords: Laminates, composites, orthotropic material, bending stress, interlamina shear stress

This is a simply-supported 7-layer symmetric strip with a central line load. A 0/90/0/90/0/90/0 material lay-up is specified with the centre ply being four times as thick as the others. The bottom surface deflection, bending stress at the centre and interlamina shear stress at the centre between the bottom and second layer is determined.

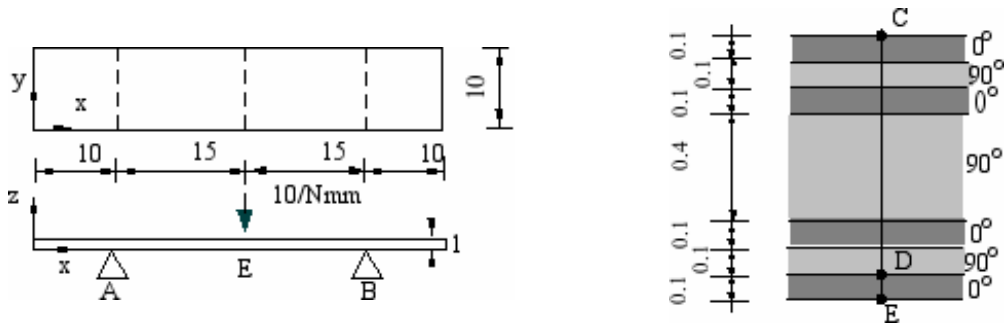


Figure VLS31: Laminated strip

Material data:  
 Young's Moduli  $E_1 = 1.0 \times 10^5 \text{ MPa}$ ,  $E_2 = E_3 = 5.0 \times 10^3 \text{ MPa}$ ,  $G_{12} = 3.0 \times 10^3 \text{ MPa}$   
 $G_{13} = G_{23} = 2.0 \times 10^3 \text{ MPa}$   
 Poisson's ratio  $\nu_{12} = 0.4$ ,  $\nu_{21} = 0.02$ ,  $\nu_{23} = 0.3$ ,  $\nu_{31} = 0.0150$

Geometry data:  
 As shown in Figure VLS31

Load data:  
 Line load  $F = 10 \text{ N/mm}$  at C ( $x = 25$ ,  $z = 1$ )

Meshes 1×5 QUAD8 and 1×5×7 HEXA20 are used to model a quarter of the laminate and the results are summarised in Table VLS31.

Result	Target	Straus7	
		QUAD8	HEXA20
Bending stress at E (MPa)	683.9	680.8(-0.45%)	672.4(-1.68 %)
Interlaminar shear stress at D (MPa)	-4.1	-2.7(-34.15%)	-4.6(12.2%)
Deflection at E (mm)	-1.06	-1.05(-0.94%)	-1.06(0.00%)

Table VLS31: Result summary



## VLS32: Wrapped thick cylinder under pressure and thermal loading

Source: Reference 12 (R0031/2)  
 Elements: Plate/shell elements  
 Keywords: Laminates, composites, orthotropic material, thermal load

This is a long thick cylinder made from isotropic material onto which external hoop windings of orthotropic material have been added.

### Material data:

#### Inner cylinder isotropic

Young's Modulus  $E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$

Poisson's ratio  $\nu = 0.3$

Thermal Expansion  $\alpha = 2 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$

#### Outer cylinder circumferentially wound

Young's Moduli  $E_1 = 1.3 \times 10^5 \text{ MPa}$

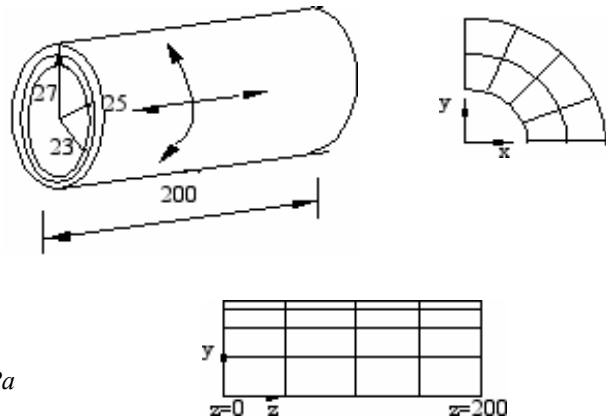
$E_2 = 5.0 \times 10^3 \text{ MPa}$

$G_{12} = 1.0 \times 10^4 \text{ MPa}$

$G_{13} = G_{23} = 5.0 \times 10^3 \text{ MPa}$

Poisson's ratio  $\nu_{12} = 0.25$

Thermal expansion  $\alpha_1 = 3 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ ,  $\alpha_2 = 2 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$



### Geometry data:

As shown in Figure VLS32,  $u_z = 0$  at  $z = 0$  and  $200$

Figure VLS32: Wrapped thick cylinder

### Load data:

Case 1: Internal pressure of  $200 \text{ MPa}$ .

Case 2: Internal pressure of  $200 \text{ MPa}$  + Temperature rise of  $130^\circ\text{C}$

A mesh of  $4 \times 4$  QUAD8 is used to model a quarter of the laminate and the results are summarised in Tables VLS32-1 and VLS32-1.

Result	Target	Straus7
Hoop stress in inner cylinder at $r = 23 \text{ (MPa)}$	1565.3	1510.3 (-3.5%)
Hoop stress in inner cylinder at $r = 25 \text{ (MPa)}$	1429.7	1390.2 (-2.8%)
Hoop Stress in outer cylinder at $r = 25 \text{ (MPa)}$	874.7	862.9 (-1.3%)
Hoop Stress in outer cylinder at $r = 27 \text{ (MPa)}$	759.1	795.1 (4.7%)

Table VLS32-1: Result summary - case 1

Result	Target	Straus7
Hoop stress in inner cylinder at $r = 23$ (MPa)	1381.0	1370.8 (-0.7%)
Hoop stress in inner cylinder at $r = 25$ (MPa)	1259.6	1218.3 (-3.3%)
Hoop Stress in outer cylinder at $r = 25$ (MPa)	1056.0	1045.8 (-1.0%)
Hoop Stress in outer cylinder at $r = 27$ (MPa)	936.1	959.5 (2.5%)

Table VLS32-2: Result summary - case 2

# VLS33: Three-Layer sandwich shell under normal pressure loading

Source: Reference 12 (R0031/3)  
 Elements: Plate/shell elements  
 Keywords: Laminates, composites, orthotropic material, bending stress, interlamina shear stress

This is a simply-supported square sandwich plate (two outer facing sheets and a thick central core) subjected to a uniform normal pressure. Orthotropic material properties are such that the facing sheets carry the bending and the shear is carried by the core.  
 The central transverse displacement, bending stresses at the centre of the top sheet and in-plane shear stress at the quarter point of the top sheet are calculated.

## Material data:

### Face sheets

Young's Moduli  $E_x = 1.0 \times 10^7 \text{ psi}$   
 $E_y = 4.0 \times 10^6 \text{ psi}$   
 $G_{xy} = 1.875 \times 10^6 \text{ psi}$   
 Poisson's ratio  $\nu_{xy} = 0.3$

### Core

Young's Modulus  $E_x = 0$ ,  
 $G_{xz} = 3.0 \times 10^4 \text{ psi}$   
 $G_{yz} = 1.2 \times 10^4 \text{ psi}$

## Geometry data:

As shown in Figure VLS33

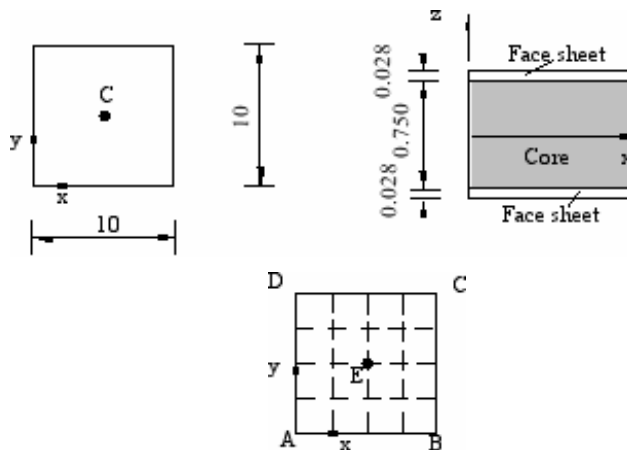


Figure VLS33: Three-layer sandwich shell

## Load data:

Uniform normal pressure 100 psi

A 4×4 mesh of QUAD8 is used to model a quarter of the plate and the results are summarised in Table VLS33.

Result	Target	Straus7
Bending stress $\sigma_{xx}$ at C (psi)	34449	34881(1.25%)
Bending stress $\sigma_{yy}$ at C (psi)	13350	13663(2.34%)
shear stress $\tau_{xy}$ at E (psi)	-5067.5	-4987.2(-1.58%)
Deflection at C (in)	-0.123	-0.120(-2.44%)

Table VLS33: Result summary

## References

1. G. A. O. Davis, R. T. Fenner and R. W. Lewis (editors), *Background to Benchmarks*, NAFEMS, Glasgow, UK, 1993.
2. NAFEMS, *Proposed NAFEMS Linear Benchmarks* (LBM Rev 2), Glasgow, 1986.
3. D. Hitchings, *Linear Static Benchmarks* (LSB2), NAFEMS, Glasgow, UK, 1987.
4. R. H. MacNeal and R. L. Harder, A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, *Finite Elements in Analysis and Design*, **1**, 3-20, 1985.
5. W. A. Nash, *Theory and Problems of Strength of Material* (2<sup>nd</sup> edition), McGraw-Hill, New York, 1977.
6. A. S. Hall, *An Introduction to the Mechanics of Solid*, Wiley, 1984.
7. H. C. Chen, A simple quadrilateral shear panel element, *Communications in Applied Numerical Methods*, **8**, 1-7, 1992.
8. S.P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells* (2<sup>nd</sup> edition), McGraw-Hill, N.Y. 1970.
9. F. P. Beer and E. R. Johnston, Jr, *Mechanics for Engineers, Statics* (4<sup>th</sup> edition), McGraw-Hill, N.Y. 1987.
10. *ANSYS Verification Manual*, Swanson Analysis Systems, Inc. 1993.
11. E. Hinton and D. R. J. Owen, *Finite Element Software for Plates and Shells*, Pineridge Press, Swansea, U.K. 1984.
12. NAFEMS, *Composite Benchmarks* (Ref: R0031), Issue: 2, 2001.



## CHAPTER 2

# Linear Buckling



# VLB1: Bar-Spring System

Elements: Truss element  
 Attribute: Node translational stiffness  
 Keywords: Linear Buckling, bar-spring system

A bar-spring system is loaded with a vertical force. Its buckling load is determined.

Model data:

Young's modulus  $E = 2 \times 10^{11} \text{ Pa}$   
 Bar diameter  $A = 0.01 \text{ m}$   
 Bar length  $L = 1.0 \text{ m}$   
 Node stiffness in X  $K_x = 10^4 \text{ N/m}$   
 Node stiffness in Y  $K_y = 2 \times 10^4 \text{ N/m}$

Target values:

Analytical solutions for the two buckling load factors are

$$P_{crX} = K_x L / 2 = 5 \times 10^3 \text{ N}$$

$$P_{crY} = K_y L / 2 = 10^4 \text{ N}$$

The two bars are modelled with truss elements, and the two springs at the junction of the bars are modelled with node translational stiffness. The springs could alternatively be modelled with spring elements.

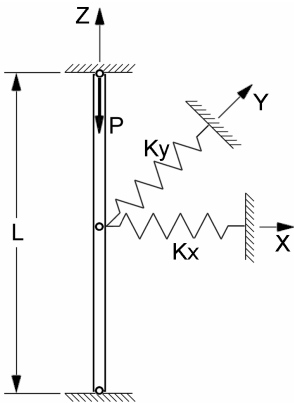


Figure VLB1: Problem sketch

Mode	Target	Straus7
1	5000	5000
2	10000	10000

Table VLB1: Summary of buckling load factors



# VLB2: 3-Member Frame

Source: Reference 1  
Elements: Beam element  
Keywords: Linear buckling, 3-member frame

A plane frame structure is subjected to two vertical point forces.  
The buckling load is determined.

Material data:  
Young's modulus  $E = 10^6 \text{ psi}$

Geometry data:  
Length and height  $L = 100 \text{ in}$   
Section area  $A = 1.0 \text{ in}^2$   
Section moment of area  $I_1 = I_2 = 1.0 \text{ in}^4$

Target value:  
Buckling load factor for the first mode = 737.9

The same number of elements is used for each of three members.

Elements per member	2	4	8
Buckling load factor	739.3(0.19%)	737.2(-0.09%)	737.1(-0.11%)

Table VLB2: Summary of buckling load results

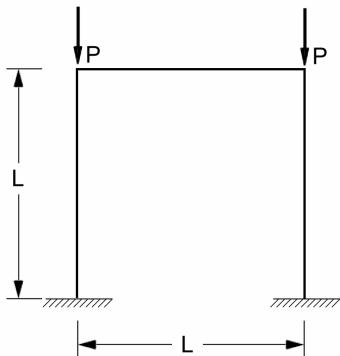


Figure VLB2: Problem sketch

# VLB3: Cantilever Beam

Source: Reference 1  
 Elements: Beam element  
 Keywords: Lateral buckling

A cantilever beam under lateral load at the free end is considered.

Material data:  
 Young's modulus  $E = 10^8 \text{ psi}$   
 Shear modulus  $G = 3.0 \times 10^7 \text{ psi}$

Geometry data:  
 Length  $L = 20 \text{ in}$   
 Height  $h = 1.0 \text{ in}$   
 Width  $w = 0.05 \text{ in}$

Meshes with different numbers of elements are used for the cantilever.

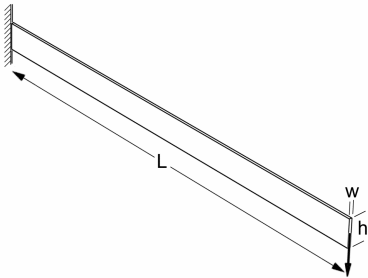


Figure VLB3: Problem sketch

Mode	Target	N=10		N=20		N=40	
1	11.27	11.29	(0.2%)	11.27	(0.0%)	11.27	(0.0%)
2	28.77	29.36	(2.0%)	28.92	(0.5%)	28.80	(0.1%)
3	46.37	48.85	(5.4%)	47.01	(1.4%)	46.53	(0.3%)

Table VLB3: Summary of buckling load results

## VLB4: Plate Column

Source: Reference 2 (Benchmark Test 1)  
 Elements: All plate/shell elements  
 Attributes: Plate edge pressure  
 Keywords: In-plane buckling, out-of-plane buckling

A clamped plate column under compression is analysed. This model considers both in-plane and out-of-plane buckling.

Material data:

Young's modulus  $E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$

Geometry data:

Length  $L = 10 \text{ m}$   
 Width  $w = 0.5 \text{ m}$   
 Thickness  $b = 0.1 \text{ m}$

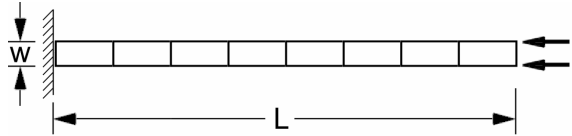


Figure VLB4: Problem sketch

Load data:

Plate edge pressure in axial direction at the free end  $q = -20.0 \text{ Pa}$

For the quadratic element, eight elements are used as shown, while for the linear elements two by two subdivision is applied to each of the quadratic quadrilateral elements.

The buckling of the column is governed by the Euler formula for a clamped column

$$P_{cr} = \left( \frac{2n-1}{2} \right)^2 \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

where  $n$  is the order of the corresponding mode. The area moments of inertia are:

$$I_{11} = \frac{bt^3}{12} = \frac{0.5 \times 0.1^3}{12} \text{ for out-of-plane buckling}$$

$$I_{22} = \frac{tb^3}{12} = \frac{0.1 \times 0.5^3}{12} \text{ for in-plane buckling}$$

As  $I_{22}$  is 25 times  $I_{11}$ , the lowest in-plane buckling load will be 25 times the lowest out-of-plane buckling load. The first five modes are calculated. Note that the numerical results are listed according the actual mode shape (buckling plane), not the magnitude.

Mode	Mode Type	Target	TRI3	QUAD4	TRI6	QUAD8	QUAD9
1	Out-of-plane	0.2159	0.2177 (0.8%)	0.2169 (0.5%)	0.2170 (0.5%)	0.2166 (0.3%)	0.2168 (0.4%)
2	Out-of-plane	1.943	1.970 (1.4%)	1.954 (0.6%)	1.953 (0.5%)	1.949 (0.3%)	1.951 (0.4%)
3	Out-of-plane	5.397	5.530 (2.5%)	5.439 (0.8%)	5.430 (0.6%)	5.419 (0.4%)	5.429* (0.6%)
4	In-plane	5.397	18.213* (237%)	5.544 (2.7%)	5.432 (0.6%)	5.429 (0.6%)	5.409* (0.2%)
5	Out-of-plane	10.58	10.998* (4.0%)	10.695 (1.1%)	10.685 (1.0%)	10.658 (0.7%)	10.703 (1.2%)

Table VLB4: Summary of buckling load factor results

\* The order in which these modes are listed is different to that which the solver calculates. The modes have been ordered according to mode shape.

## VLB5: Plate Column – Distorted Mesh

Source: Reference 2 (Benchmark Test 3)  
 Elements: All plate/shell elements  
 Attributes: Plate edge pressure  
 Keywords: Mesh distortion

In order to test the effect of element distortion, the problem in VLB4 is solved again with modified meshes as shown. Nodes are shifted to introduce distortion.

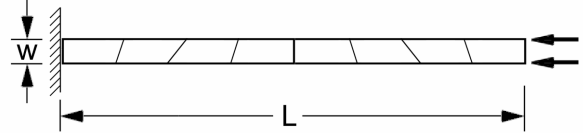


Figure VLB5: Problem sketch

The same material constants and mesh densities are used. Comparing Table VLB5 with TableVLB4 shows that the results are almost the same, indicating that all the elements are not sensitive to the distortion introduced.

Mode	Mode Type	Target	TRI3	QUAD4	TRI6	QUAD8	QUAD9
1	Out-of-plane	0.2159	0.2176 (0.8%)	0.2169 (0.5%)	0.2170 (0.5%)	0.2166 (0.3%)	0.2168 (0.4%)
2	Out-of-plane	1.943	1.972 (1.5%)	1.952 (0.5%)	1.953 (0.5%)	1.949 (0.3%)	1.951 (0.4%)
3	Out-of-plane	5.397	5.561 (3.0%)	5.424 (0.5%)	5.432 (0.6%)	5.420 (0.4%)	5.430* (0.6%)
4	In-plane	5.397	16.317* (202%)	5.499 (1.9%)	5.459 (1.1%)	5.427 (0.6%)	5.413* (0.3%)
5	Out-of-plane	10.58	11.175* (5.6%)	10.639 (0.6%)	10.726 (1.4%)	10.688 (1.0%)	10.715 (1.3%)

Table VLB5: Summary of buckling load results

\* The order in which these modes are listed is different to that which the solver calculates. The modes have been ordered according to mode shape.

# VLB6: Simply Supported Rectangular Plate

Source:	Reference 3
Elements:	All plate/shell elements
Attribute:	Plate pre-stress
Keywords:	Simply supported, uni-axial compression

The buckling load for a simply supported rectangular plate under uni-axial compression is determined.

Material data:	
Young's modulus	$E = 2.0 \times 10^5 \text{ MPa}$
Poisson's ratio	$\nu = 0.3$

Geometry data:	
Length	$a = 30 \text{ mm}$
Width	$b = 10 \text{ mm}$
Thickness	$t = 0.1 \text{ mm}$

Mesh:	
Quadratic elements	8×4 (as shown)
Linear elements	16×8

Target value:  
The buckling stress is given by the following equation:

$$\sigma_{crit} = 4 \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 = 72.3 \text{ MPa}$$

A 1 Pa pre-stress is applied in the ‘a’ direction, and the transverse deflection of the nodes on the four edges is fixed.

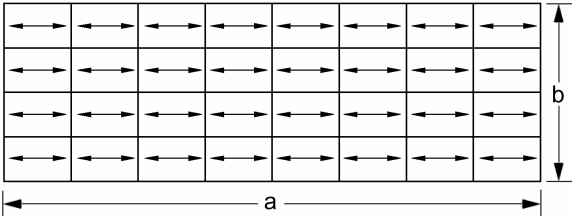


Figure VLB6: Problem sketch

Mesh	TRI3	QUAD4	TRI6	QUAD8	QUAD9
Result	73.0 (+0.97%)	69.7 (-3.6%)	76.1 (+5.3%)	73.1 (+1.1%)	72.3 (0.0%)

Table VLB6: Summary of buckling load results (MPa)

## VLB7: Square Cross-Ply Laminate Plate

---

Source:	Reference 4
Elements:	All plate/shell elements
Material:	Laminate
Attribute:	Plate pre-stress
Keywords:	Multiple freedom sets, laminate, coupling between membrane and bending

---

The buckling load factor for a square laminate plate under uni-axial compression is calculated.

The laminate has a cross-ply with two layers of graphite-epoxy. The material axes of the two plies are staggered by 90 degrees, therefore the lay-up is non-symmetric.

Material data:

Modulii	$E_{11} = 130 \text{ GPa}$ , $E_{22} = 9 \text{ GPa}$ , $G_{12} = 4.8 \text{ GPa}$
Poisson's ratio	$\nu_{12} = 0.28$
Thickness	$t_{ply} = 0.01 \text{ m}$

The laminate is 10 by 10 metres, and the four edges are simply supported. The exact solution for the critical compression load density is:

$$N_{cr} = \bar{N}_{cr} \frac{E_{22} t^3}{b^2} = 7.45780 \times \frac{9 \times 10^9 \times 0.01^3}{10^2} = 671.20 \text{ N/m}$$

This exact solution has been derived based on the following assumptions:

- (1) The plate internal force distribution is uniform and the only non-zero component is the one in the X direction; and
- (2) The buckling load is calculated with only the lateral displacement of the plate fixed at the four edges and membrane deformation free.

To create this scenario, an element pre-stress of 100.0 Pa is applied in the X direction, which corresponds to a compressive load of 1.0 N/m. Two freedom sets are defined, one for the linear static solution and the other for the linear buckling solution. In the freedom set for the linear static solution, three translational displacements of all the nodes on the four edges are fixed, and as a result, a uni-axial internal force field is established. For the buckling solution, in the Z direction, all nodes on the boundary are fixed, while for the in-plane movement, only the rigid-body mode is restrained

Two mesh densities are used. For the coarse meshes, a 4 by 4 division is used for quadratic elements, and an 8 by 8 division for linear elements. For the fine mesh, the element numbers are doubled in both directions.

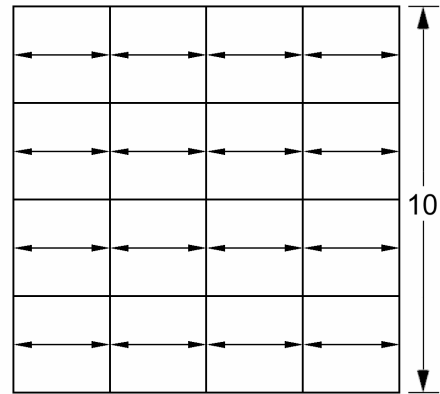


Figure VLB7: Problem sketch

Mesh	TRI3		QUAD4		TRI6		QUAD8		QUAD9	
Coarse	1345.64	(100%)	659.04	(-1.8%)	890.53	(32.7%)	675.21	(0.6%)	671.86	(0.1%)
Fine	1342.02	(100%)	668.12	(-0.5%)	700.98	(4.4%)	671.46	(0.0%)	671.24	(0.0%)

*Table VLB7: Summary of buckling load results (N/m)*

Note that the linear 3-node triangular element converges to a different solution because the coupling between membrane and bending actions is ignored in its formulation.

## VLB8: Cylindrical Shell

Source: Reference 2 (Test 4)  
 Elements: All plate/shell elements  
 Attribute: Plate pre-stress  
 Keywords: Axial compression, cylindrical shell

A cylindrical shell under axial compression is considered.

Material data:

Modulus  $E = 2.0 \times 10^5 \text{ MPa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$

Geometry data:

Length  $L = 100 \text{ mm}$   
 Radius  $R = 50 \text{ mm}$   
 Thickness  $t = 1.0 \text{ mm}$

Load data:

Unit pre-stress in the axial direction of the cylinder

The analytical solution for the critical stress is

$$\sigma_{cr} = \frac{Et}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}} = 2420.9 \text{ MPa}$$

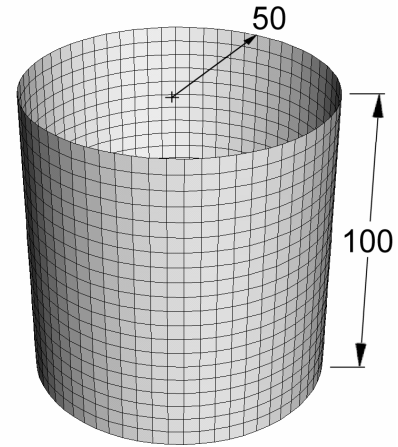


Figure VLB8: Problem sketch

A quarter of the shell is modelled. Two mesh densities are used. The coarse mesh uses 8 (hoop) by 10 (length) quadratic elements or 16 by 20 linear elements, and the fine mesh uses twice the number of elements in both directions.

To improve convergence, the number of iterations has been increased and the working set has been expanded from the default values.

Mesh	TRI3	QUAD4	TRI6	QUAD8	QUAD9
Coarse	2375.9 (-1.9%)	2229.0 (-7.9%)	2399.6 (-0.9%)	1837.7 (-24.1%)	2372.2 (-2.0%)
Fine	2362.6 (-2.4%)	2357.3 (-2.6%)	2284.3 (-5.6%)	2259.6 (-6.7%)	2358.4 (-2.6%)

Table VLB8: Summary of buckling load results (MPa)



## References

1. S. P. Timoshenko and J. M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, N.Y., 1961.
2. G. Steven and H. Ma, Studies on buckling analysis of thin-walled structures, *Proceedings of International Conference on Computational Methods in Engineering*, 11-13 November 1992, Singapore.
3. R. J. Roark and W. C. Young, *Formulas for Stress and Strain* (4<sup>th</sup> edition), McGraw-Hill, 1976.
4. G. B. Chai and K. H. Hoon, Buckling of generally laminated composite plates, *Composite Science and Technology*, 45 (1992), 125-133.

## CHAPTER 3

# Nonlinear Static



# VNS1: Snap-Back of a Bar-Spring System

Source: Reference 1 (Test NL4) and Reference 2 (Test GNL-3)  
 Elements: Truss and spring elements  
 Attributes: Node translational stiffness, prescribed nodal displacement  
 Keywords: Geometric nonlinearity, snap-back

The load-displacement curve for a bar-spring system is determined.

Material data:

Bar constant  $EA = 5.0 \times 10^7$   
 $(K2 = EA/L / (1 + \alpha^2)^{1/2})$   
 Spring stiffness  $K1 = 1.5$   
 $K3 = 0.25$   
 $K4 = 1.0$

Geometry data:

Length  $L = 2500$   
 Factor  $\alpha = 0.01$

Load data:

Enforced displacement is applied instead of a point force P

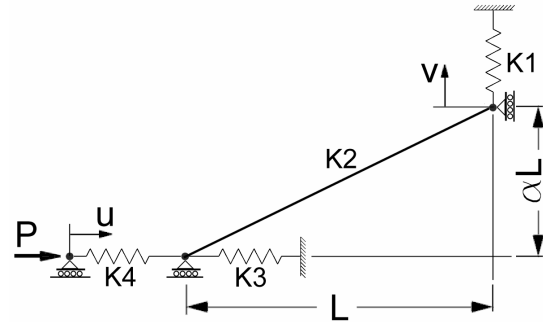


Figure VNS1-1: Problem sketch

The magnitude of the corresponding force is recovered by calculating the node reaction force. The enforced displacement magnitudes are given in Table VNS1.

Load Increment	u
1	650
2	1300
3	1950
4	2600
5	3250
6	3900

Table VNS1: Enforced displacement

The results for the force applied and the lateral displacement are summarised in Figure VNS1-2, together with the reference values from NAFEMS.

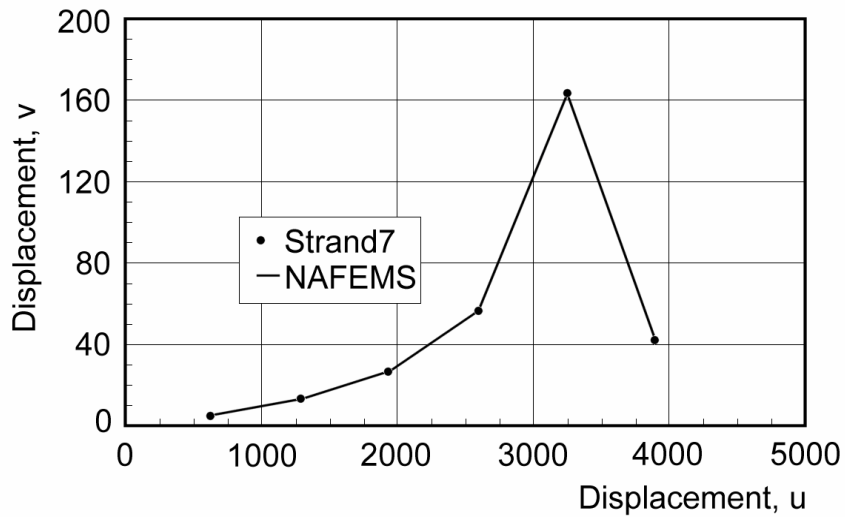
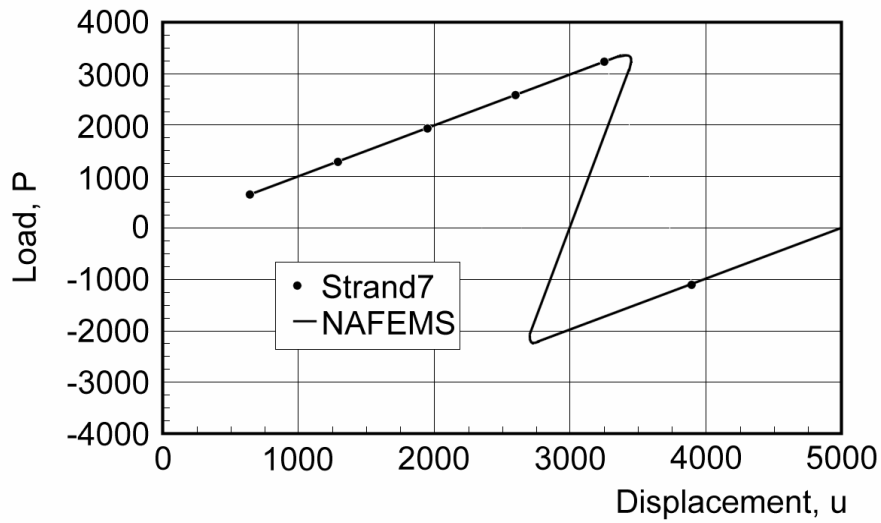


Figure VNS1-2: Result diagrams

## VNS2: Straight Cantilever With End Moment

Source: Reference 1 (Test NL5) and Reference 2 (Test GNL-5)  
 Elements: Beam element  
 Keywords: Geometric nonlinearity, large deflection

A concentrated moment is applied to the free end of a cantilever. The geometry data are shown in Figure VNS2-1.

Material data:

Young's modulus  $E = 210 \times 10^9 \text{ Pa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.0$

Geometry data:

Length  $L = 3.2 \text{ m}$   
 Depth  $d = 0.1 \text{ m}$   
 Width  $t = 0.1 \text{ m}$

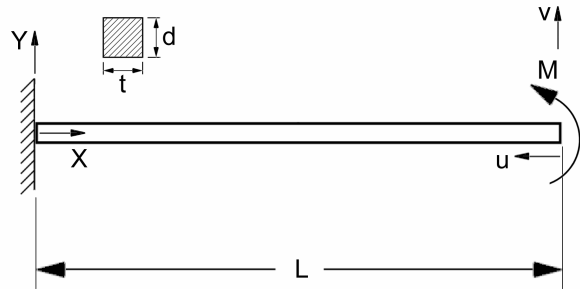


Figure VNS2-1: Cantilever beam under end moment

Load data:

A pure bending moment  $M = 2\pi EI/L$  is applied in 10 equal load increments, until the beam is bent into a circular shape.

The closed form solution for the nodal displacements at the free end can be derived based on geometry change:

$$\theta_z = \frac{ML}{EI} \quad u = L \left( 1 - \frac{\sin \theta_z}{\theta_z} \right) \quad v = L \frac{(1 - \cos \theta_z)}{\theta_z}$$

A beam model with eight equal elements produces very accurate displacement results for the free end.

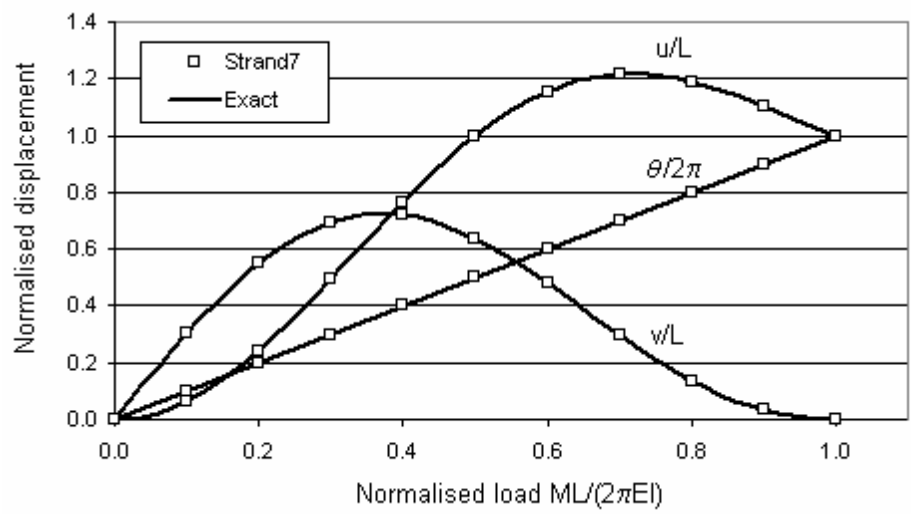


Figure VNS2-2: Displacement diagrams

## VNS3: Straight Cantilever With Axial End Point Load

Source: Reference 1 (Test NL6) and Reference 2 (Test GNL-5)  
 Elements: Beam element  
 Keywords: Geometric nonlinearity, large deflection

A cantilever beam is subjected to axial compression. The post-buckling behaviour of the cantilever is investigated.

Material data:

Young's modulus  $E = 210 \times 10^9 \text{ Pa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.0$

Geometry data:

Length  $L = 3.2 \text{ m}$   
 Depth  $d = 0.1 \text{ m}$   
 Width  $t = 0.1 \text{ m}$

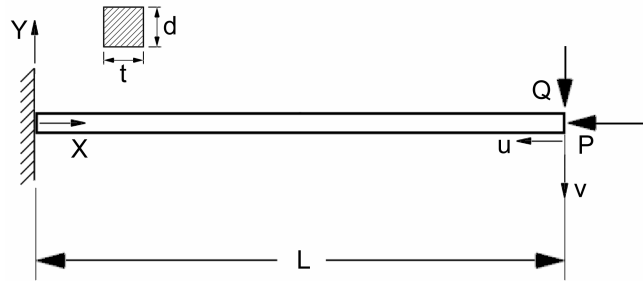


Figure VNS3-1: Cantilever beam under end forces

Load data:

Case 1 - Axial compression P  
 Case 2 - Lateral force Q

A small lateral force is applied initially to provide the perturbation. After the application of the axial load, the lateral force is removed so that the response is due to the lateral load only. Each load is applied to a separate load case so that they can be factored independently.

Eight beam elements of equal length are used in the model. Table VNS3 presents the nodal displacement results for all the ten load steps, together with the load factors, reference solution values and relative error.

Increment	Load		u/L		v/L		$\theta/180^\circ$	
	$PL^2/EI$	$QL^2/EI$	Target	Straus7	Target	Straus7	Target	Straus7
1	2.504	0.01	—	—	—	—	—	—
2	2.504	0	0.030	0.023 (-23.3%)	0.220	0.191 (-13.2%)	0.111	0.097 (-12.6%)
3	2.623	0	0.119	0.112 (-5.9%)	0.422	0.411 (-2.6%)	0.222	0.216 (-2.7%)
4	2.842	0	0.259	0.255 (-1.5%)	0.593	0.589 (-0.7%)	0.333	0.330 (-0.9%)
5	3.190	0	0.440	0.436 (-0.9%)	0.719	0.717 (-0.3%)	0.444	0.442 (-0.5%)
6	3.746	0	0.651	0.649 (-0.3%)	0.792	0.791 (-0.1%)	0.556	0.554 (-0.4%)
7	4.649	0	0.877	0.875 (-0.2%)	0.803	0.803 (0.0%)	0.667	0.666 (-0.1%)
8	6.270	0	1.107	1.106 (-0.1%)	0.750	0.750 (0.0%)	0.778	0.778 (0.0%)
9	9.941	0	1.340	1.340 (-0.1%)	0.625	0.624 (-0.2%)	0.889	0.889 (0.0%)
10	22.493	0	1.577	1.577 (0.0%)	0.421	0.420 (-0.2%)	0.978	0.979 (0.1%)

Table VNS3: Nodal displacement results



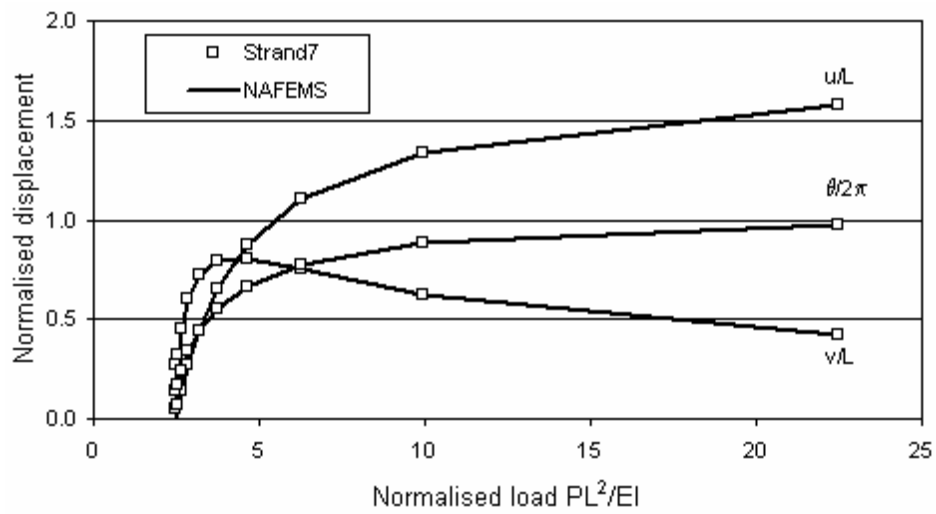


Figure VNS3-2: Displacement diagrams

# VNS4: Straight Cantilever With Lateral Point Load

Source: Reference 2 (Test GNL-5)  
 Elements: Beam element  
 Keywords: Geometric nonlinearity, large deflection

The same cantilever beam as in VNS3 is subjected to a lateral force  $Q$  only. A transverse force  $Q=10EI/L^2$  is applied in ten equal load increments.

Very good agreement is achieved with a mesh consisting of eight equal length elements.

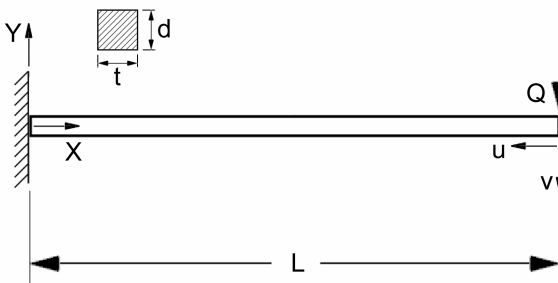


Figure VNS4-1: Cantilever beam under end forces

Load $QL^2/EI$	u/L		V/L		$\theta/90^\circ$	
	Exact	Straus7	Exact	Straus7	Exact	Straus7
1	0.05643	0.05645 (0.03%)	0.30172	0.30182 (0.03%)	0.29370	0.29381 (0.03%)
2	0.16064	0.16082 (0.11%)	0.49346	0.49382 (0.07%)	0.49768	0.49809 (0.08%)
3	0.25442	0.25485 (0.17%)	0.60325	0.60384 (0.10%)	0.62772	0.62846 (0.12%)
4	0.32894	0.32962 (0.21%)	0.66996	0.67071 (0.11%)	0.71380	0.71480 (0.14%)
5	0.38763	0.38853 (0.23%)	0.71379	0.71466 (0.12%)	0.77373	0.77492 (0.15%)
6	0.43459	0.43568 (0.25%)	0.74457	0.74554 (0.13%)	0.81723	0.81855 (0.16%)
7	0.47293	0.47418 (0.26%)	0.76737	0.76843 (0.14%)	0.84986	0.85128 (0.17%)
8	0.50483	0.50622 (0.28%)	0.78498	0.78613 (0.15%)	0.87499	0.87646 (0.17%)
9	0.53182	0.53335 (0.29%)	0.79906	0.80029 (0.15%)	0.89475	0.89626 (0.17%)
10	0.55500	0.55664 (0.30%)	0.81061	0.81193 (0.16%)	0.91055	0.91207 (0.17%)

Table VNS4: Nodal displacement results

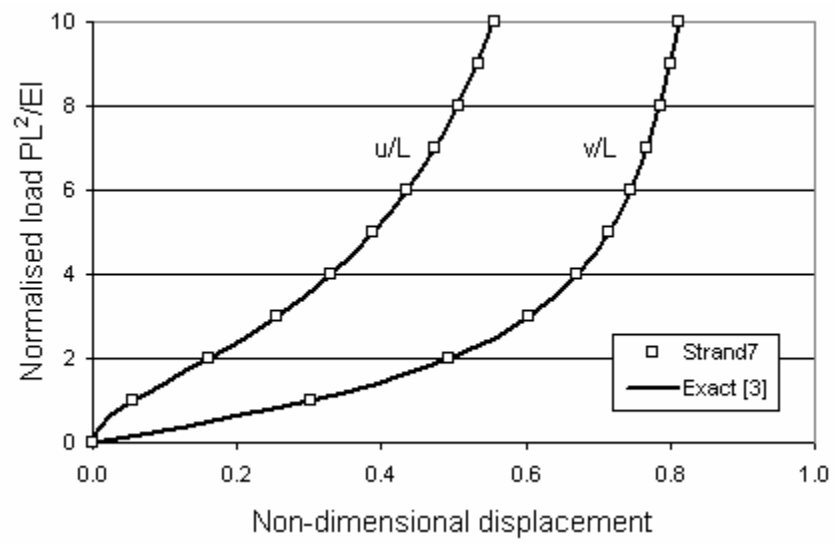


Figure VNS4-2: Normalised displacement diagrams

## VNS5: Limit Load GNL

---

Source:	Reference 2 (Test GNL-1)
Elements:	Truss element
Attribute:	Prescribed nodal displacement
Keywords:	Geometric nonlinearity, finite strain, large deflection, shallow strut, deep strut

---

The strut shown in the figure is analysed for both shallow and deep configurations, with the ratio  $H/L$  equal to 0.01 and 1.0, respectively. This test is used to check the formulation of the finite strain truss element.

Material data:

$$\begin{aligned}\text{Young's modulus} & E = 210 \times 10^9 \text{ Pa} \\ \text{Poisson's ratio} & \nu = 0.5\end{aligned}$$

Geometry data:

$$\begin{aligned}\text{Length} & L = 2500 \text{ mm} \\ \text{Depth} & H = \begin{cases} 25 \text{ mm} & \text{for shallow strut} \\ 2500 \text{ mm} & \text{for deep strut} \end{cases} \\ \text{Area} & A = 100 \text{ mm}^2\end{aligned}$$

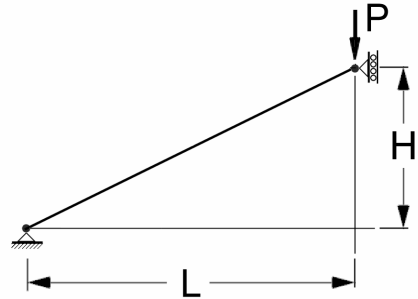


Figure VNS5-1: Shallow and deep struts

For the shallow strut, the strain in the element is small and the analytical solution can be written as

$$P = \frac{EA}{2} \left( \frac{H}{L} \right)^3 \left[ 2 \frac{u}{H} + 3 \left( \frac{u}{H} \right)^2 + \left( \frac{u}{H} \right)^3 \right]$$

For the deep strut, axial strain must be considered to obtain the correct solution; unlike the shallow case where even a solution based on the small strain assumption is reasonably accurate.

A truss element is used to model the strut, and displacement control is used. Unit downward vertical displacement is enforced in the nodal freedom conditions, and then factored using a load table.

v/H	Shallow strut (N)	Deep strut ( $\times 10^6$ N)
0.2	7.1991	2.9505
0.4	9.5990	4.5116
0.6	8.3993	4.4274
0.8	4.7996	2.7347
1.0	0.0000	0.0000
1.2	-4.7996	-2.7347
1.4	-8.3993	-4.4274
1.6	-9.5990	-4.5116
1.8	-7.1991	-2.9505
2.0	0.0000	0.0000
2.2	13.1976	4.0153
2.4	33.5925	8.8108

Table VNS5: Vertical force vs displacement results

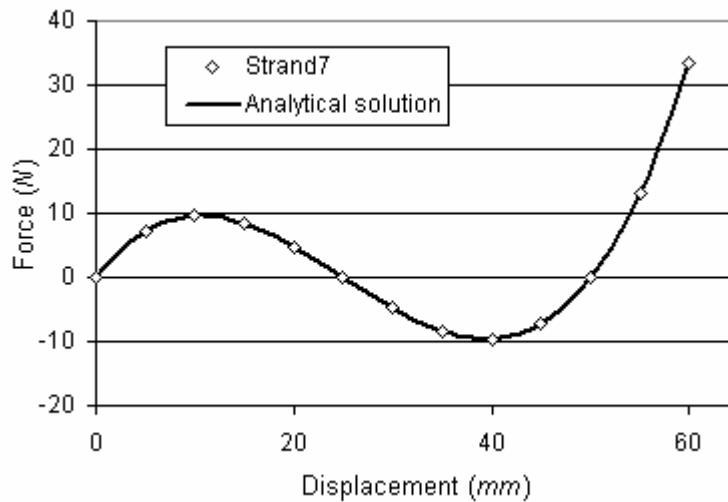


Figure VNS5-2: Load-displacement curve for shallow strut

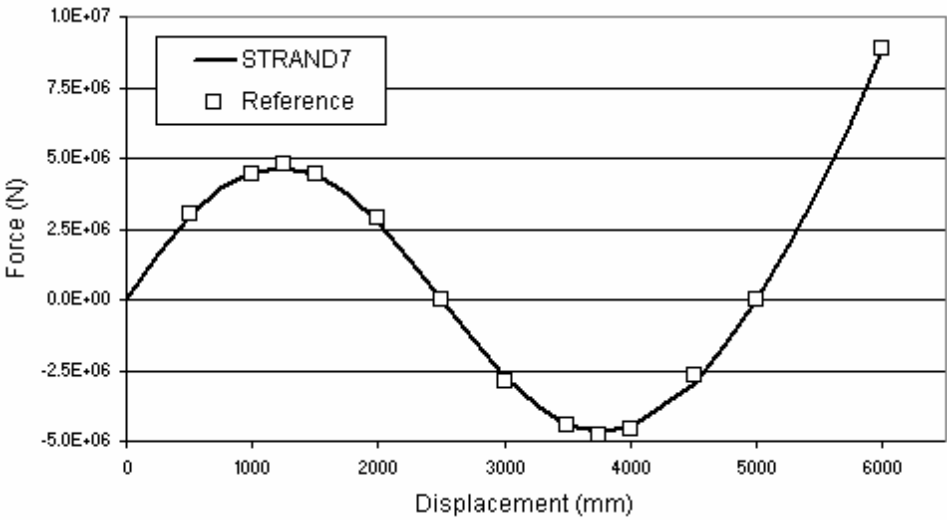


Figure VNS5-3: Load displacement curve for deep strut

## VNS6: Plane Strain Plasticity

---

Source: Reference 4 (Test PL-1)  
 Elements: Plane strain element  
 Attribute: Prescribed nodal displacement  
 Keywords: Plasticity, isotropic hardening, multiple freedom sets, constitutive model test

---

A square plane strain mesh under enforced bi-axial tension is analysed. Both perfect plasticity and isotropic hardening models are considered.

One 8-node isoparametric element is used to model a unit square plate ( $L = 1.0 \text{ mm}$ ). Uniform displacement on the boundary is enforced by the use of node restraints. Two freedom sets are used, one for the horizontal component ( $u$ ) and the other for the vertical component ( $v$ ).

Material data:

Young's modulus  $E = 250 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.25$   
 Yield criteria von Mises  
 Yield stress  $\sigma_y = 5.0 \text{ N/mm}^2$   
 Tangent modulus  $E_t = 50 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$  (after yield for isotropic hardening)

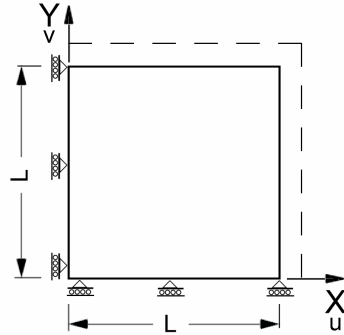


Figure VNS6: Plane strain square mesh

Eight load increments are considered. All results agree well with the reference solutions.

Increment	Displacement change	u	v	Stress state
1	$\Delta u = R$	R	0.0	First yield
2	$\Delta u = R$	2R	0.0	Plastic flow
3	$\Delta v = R$	2R	R	Elastic unloading
4	$\Delta v = R$	2R	2R	Plastic reloading
5	$\Delta u = -R$	R	2R	Plastic flow
6	$\Delta u = -R$	0.0	2R	Plastic flow
7	$\Delta v = -R$	0.0	R	Elastic unloading
8	$\Delta v = R$	0.0	0.0	Plastic flow

Table VNS6-1: Loading conditions ( $R = 2.5 \times 10^{-5} \text{ mm}$ )

Increment	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$	$\sigma_{zz}$	$\sigma_{vm}$
1	7.5000	2.5000	2.5000	5.0000
2	11.6667	6.6667	6.6667	5.0000
3	14.1667	14.1667	9.1667	5.0000
4	16.6667	19.5534	13.7799	5.0000
5	10.1430	15.7198	11.6373	5.0000
6	5.2537	10.9778	8.7684	5.0000
7	2.7537	3.4778	6.2684	3.2144
8	0.1877	-2.9760	2.7883	5.0000

Table VNS6-2: Stress results (Perfect plasticity model)

Increment	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$	$\sigma_{zz}$	$\sigma_{vm}$
1	7.5000	2.5000	2.5000	5.0000
2	12.2414	6.3793	6.3793	5.8621
3	14.7414	13.8793	8.8793	5.4821
4	17.0861	20.1062	12.8077	6.3519
5	10.0044	16.8733	10.6224	6.5817
6	4.2409	12.5739	8.1852	7.2200
7	1.7409	5.0739	5.6852	3.6769
8	-0.7591	-2.4261	3.1852	4.9912

Table VNS6-3: Straus7 results (Isotropic hardening model)



## VNS7: Plane Stress Plasticity

---

Source: Reference 4 (Test PL-2)  
 Elements: Plane stress element  
 Attribute: Prescribed nodal displacement  
 Keywords: Plasticity, isotropic hardening, multiple freedom sets, constitutive model test

---

A square membrane under enforced bi-axial tension is analysed. Both perfect plasticity and isotropic hardening models are considered.

One 8-node isoparametric element is used to model a unit square plate ( $L = 1.0 \text{ mm}$ ). Uniform displacement on the boundary is enforced by the use of node restraints. Two freedom sets are used, one for the horizontal component ( $u$ ) and the other for the vertical component ( $v$ ).

Material parameters:

Young's modulus  $E = 250 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.25$   
 Yield criteria von Mises  
 Yield stress  $\sigma_y = 5.0 \text{ N/mm}^2$   
 Tangent modulus  $E_t = 50 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$  (after yield for isotropic hardening)

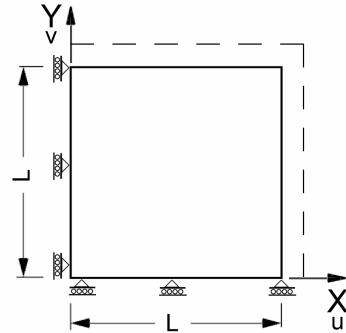


Figure VNS7: Plane stress square mesh

Eight load increments are considered. All results agree well with the reference solutions.

Increment	Displacement change	u	v	Stress state
1	$\Delta u = R$	R	0.0	First yield
2	$\Delta u = R$	2R	0.0	Plastic flow
3	$\Delta v = R$	2R	R	Elastic unloading
4	$\Delta v = R$	2R	2R	Plastic reloading
5	$\Delta u = -R$	R	2R	Plastic flow
6	$\Delta u = -R$	0.0	2R	Plastic flow
7	$\Delta v = -R$	0.0	R	Elastic unloading
8	$\Delta v = R$	0.0	0.0	Plastic flow

Table VNS7-1: Loading conditions ( $R = 2.5 \times 10^{-5} \text{ mm}$ )

Increment	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$	$\sigma_{vm}$
1	5.6180	1.6562	5.0000
2	5.7449	2.3754	5.0000
3	4.5853	5.3310	5.0000
4	3.6024	5.7085	5.0000
5	-2.4437	3.3082	5.0000
6	-4.8749	0.2414	5.0000
7	-5.0375	-4.9617	5.0000
8	-3.8217	-5.6586	5.0000

Table VNS7-2: Stress results (Perfect plasticity model)

Increment	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$	$\sigma_{vm}$
1	5.8438	1.6671	5.2141
2	7.4732	2.8180	6.5368
3	7.1770	7.4070	7.2947
4	6.6577	9.6935	8.5879
5	-0.0089	8.0268	8.0313
6	-5.3653	5.0880	9.0539
7	-7.0320	-1.5787	6.3906
8	-8.6987	-8.2453	8.4811

Table VNS7-3: Stress results (Isotropic hardening model)

## VNS8: Solid Plasticity

---

Source: Reference 4 (Test PL-3)  
 Elements: Brick element  
 Attribute: Prescribed nodal displacement  
 Keywords: Plasticity, isotropic hardening, multiple freedom sets, constitutive model test

---

A cube under enforced tri-axial tension is analysed. Both perfect plasticity and isotropic hardening models are considered.

One 20-node isoparametric element is used to model a unit cube ( $L = 1.0 \text{ mm}$ ). Uniform displacements on the boundary are enforced by the use of node restraints. Three freedom sets are used, one for the horizontal component (u), one for the vertical component (v), and the other one for the normal component (w).

Material data:

Young's modulus  $E = 250 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.25$   
 Yield criteria von Mises  
 Yield stress  $\sigma_y = 5.0 \text{ N/mm}^2$   
 Tangent modulus  $E_t = 50 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$  (after yield for isotropic hardening)

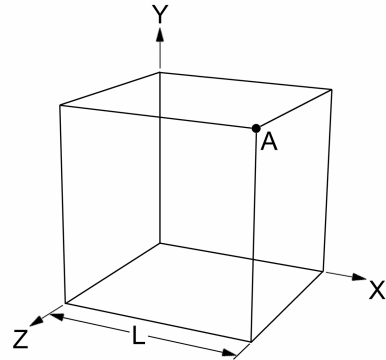


Figure VNS8: A unit cube

Twelve load increments are considered. All results agree well with the reference solutions.

Increment	Displacement change	u	v	w
1	$\Delta u = R$	R	0.0	0.0
2	$\Delta u = R$	2R	0.0	0.0
3	$\Delta v = R$	2R	R	0.0
4	$\Delta v = R$	2R	2R	0.0
5	$\Delta w = R$	2R	2R	0.0
6	$\Delta w = R$	2R	2R	R
7	$\Delta u = -R$	R	2R	2R
8	$\Delta u = -R$	0.0	2R	2R
9	$\Delta v = -R$	0.0	R	2R
10	$\Delta v = -R$	0.0	0.0	2R
11	$\Delta w = -R$	0.0	0.0	R
12	$\Delta w = -R$	0.0	0.0	0

Table VNS8-1: Loading conditions ( $R = 2.5 \times 10^{-5} \text{ mm}$ )

Increment	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$	$\sigma_{zz}$	$\sigma_{vm}$
1	7.5000	2.5000	2.5000	5.0000
2	11.6667	6.6667	6.6667	5.0000
3	14.1667	14.1667	9.1667	5.0000
4	16.6667	19.5534	13.7799	5.0000
5	19.1667	22.0534	21.2799	2.5882
6	22.3103	24.6397	28.0500	5.0000
7	17.6650	21.5205	23.3145	5.0000
8	13.3748	17.8584	18.7667	5.0000
9	11.0663	10.6107	15.8229	5.0000
10	8.4649	5.3830	11.1520	5.0000
11	5.9649	2.8830	3.6520	2.7784
12	2.7244	0.3012	-3.0255	5.0000

Table VNS8-2: Stress results (Perfect plasticity model)

Increment	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$	$\sigma_{zz}$	$\sigma_{vm}$
1	7.5000	2.5000	2.5000	5.0000
2	12.2414	6.3793	6.3793	5.8621
3	14.7414	13.8793	8.8793	5.4821
4	17.0861	20.1062	12.8077	6.3519
5	19.5861	22.6062	20.3077	2.7317
6	22.0861	25.1062	27.8077	4.9576
7	16.3561	22.1039	24.0400	6.9220
8	11.5395	18.5948	19.8657	7.7691
9	9.0395	11.0948	17.3657	7.5125
10	6.8849	4.5072	13.6078	8.1753
11	4.3849	2.0072	6.1078	3.5663
12	1.8849	-0.4928	-1.3922	2.9327

Table VNS8-3: Stress results (Isotropic hardening model)

## VNS9: Pressurized Cylinder Plasticity

Source: Reference 4 (Test PL-5) and Reference 6 (Section 2.5)  
 Elements: Axisymmetric and plane strain elements  
 Keywords: Plasticity, isotropic hardening, multiple freedom sets

A thick cylinder under internal pressure is analysed. With 8-node axisymmetric elements, two equal size elements are used as shown in Fig VNS9-1. A plane strain element mesh is also used, in which two 8-node elements model a 10 degree sector of the cylinder.

### Material data:

Young's modulus  $E = 21 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$   
 Yield criteria von Mises  
 Yield stress  $\sigma_y = 24.0 \text{ N/mm}^2$   
 Tangent modulus  $E_T = 4.2 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$  (after yield for isotropic hardening)

### Geometry data:

Internal radius  $R_1 = 100 \text{ mm}$   
 External radius  $R_2 = 200 \text{ mm}$   
 Height  $H = 100 \text{ mm}$  (for axisymmetric element mesh only)

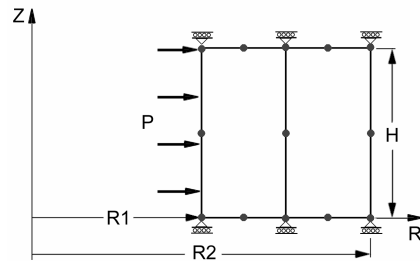


Figure VNS9-1: Cylinder under internal pressure

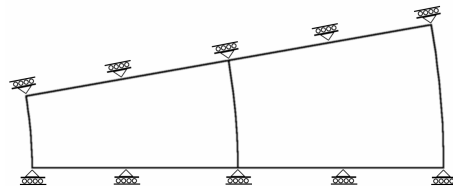


Figure VNS9-2: Plane strain mesh

Two nonlinear material models are used, the perfect plasticity and the isotropic hardening plasticity models. Reduced 2x2 Gauss integration is used for the element stiffness matrix and force vector calculations for all analyses.

For the analysis with the perfect plasticity model, the load in the last increment will take the cylinder to the fully plastic range. For the Straus7 solutions, extra increments are introduced between the listed increments 3 and 4. Without these increments, the results for the radial displacement at inner surface in increment 4 are even higher.

Increment	Pressure	Axisymmetric element			Plane strain element		
		Reference 6	Straus7		Reference 6	Straus7	
1	10.0	0.09079	0.09079	(0.00%)	0.09118	0.09080	(-0.42%)
2	14.0	0.14205	0.14230	(0.18%)	0.14275	0.14231	(-0.31%)
3	16.6	0.19873	0.19886	(0.07%)	0.19963	0.19889	(-0.37%)
4	19.2	0.70128	0.77368	(10.3%)	0.70561	0.77374	(9.7%)

Table VNS9-1: Results for the radial displacement at inner surface (perfect plasticity)

Increment	Pressure	Axisymmetric element			Plane strain element		
		Reference 6	Straus7		Reference 6	Straus7	
1	10.0	0.09079	0.09079	(0.00%)	0.09118	0.09080	(-0.42%)
2	14.0	0.13659	0.13666	(0.06%)	0.13724	0.13667	(-0.42%)
3	24.0	0.40357	0.40439	(0.20%)	0.40562	0.40442	(-0.30%)
4	34.0	0.87477	0.87550	(0.08%)	0.87896	0.87557	(-0.39%)

Table VNS9-2: Results for the radial displacement at inner surface (isotropic hardening)

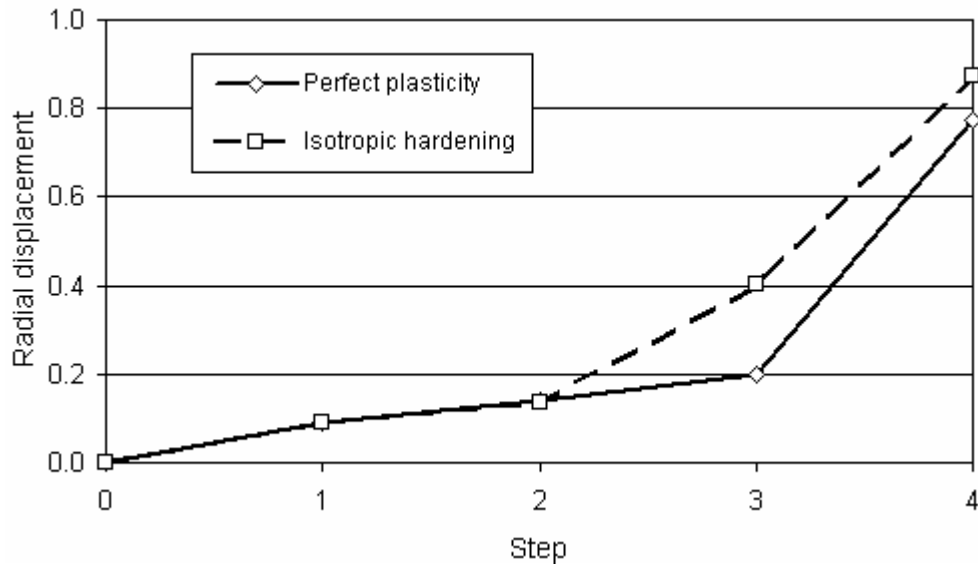


Figure VNS9-3: Displacement results (axisymmetric elements)

Increment	$S_R$			$S_\theta$		$S_z$			$S_{VM}$		
	Ref 6	Straus7		Ref 6	Straus7	Ref 6	Straus7		Ref 6	Straus7	
1	-7.6084	-7.6084	(0.00%)	14.2750	14.2750 (0.00%)	2.0000	2.0000	(0.00%)	18.998	18.998	(0.0%)
2	-11.0344	-11.0521	(0.16%)	16.6650	16.6416 (-0.14%)	2.0705	1.9028	(-8.10%)	24.000	24.000	(0.0%)
3	-13.7930	-13.7925	(0.00%)	13.9151	13.9199 (0.03%)	0.5046	0.1954	(-61%)	24.000	24.000	(0.0%)
4	-16.3958	-16.3956	(0.00%)	11.3170	11.3172 (0.00%)	-2.5201	-2.4975	(-0.90%)	24.000	24.000	(0.0%)

Table VNS9-3: Stress results for the Gauss point near the bore (axisymmetric and perfect plasticity model)

Increment	$S_R$			$S_\theta$		$S_z$			$S_{VM}$		
	Ref 6	Straus7		Ref 6	Straus7	Ref 6	Straus7		Ref 6	Straus7	
1	-7.6084	-7.6084	(0.00%)	14.2750	14.2750 (0.00%)	2.0000	2.0000	(0.00%)	18.998	18.998	(0.00%)
2	-10.8993	-10.9040	(0.04%)	17.8887	17.8777 (-0.06%)	2.3505	2.2773	(-3.11%)	24.957	24.955	(-0.01%)
3	-19.6102	-19.6146	(0.02%)	22.0520	22.0758 (0.11%)	0.8896	1.0932	(23%)	36.082	36.105	(0.06%)
4	-27.2326	-27.2300	(-0.01%)	36.2498	36.2780 (0.08%)	3.7510	3.9113	(4.27%)	54.983	55.003	(0.04%)

Table VNS9-4: Stress results for the Gauss point near the bore (axisymmetric and isotropic hardening model)

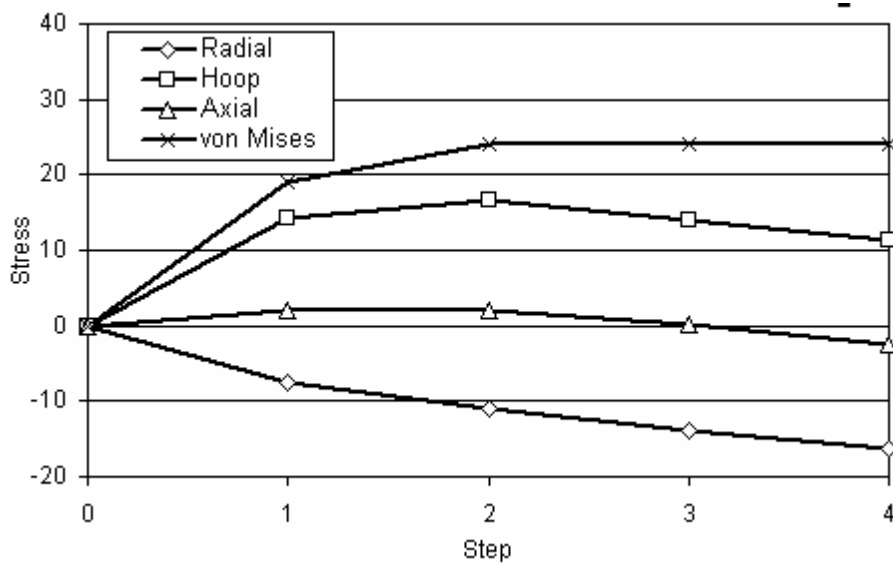


Figure VNS9-4: Stress history for perfect plasticity model

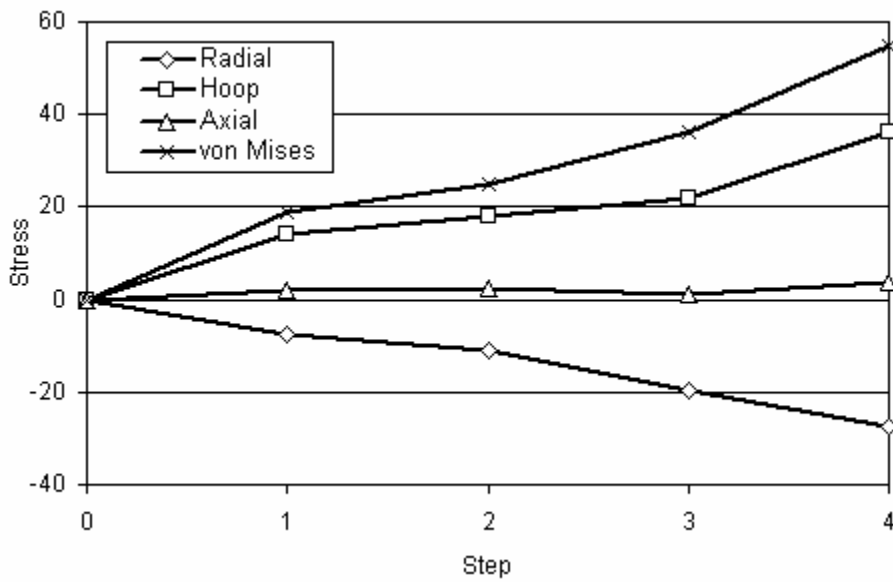


Figure VNS9-5: Stress history for isotropic hardening model

## VNS10: Two-Bar Assembly Plasticity

---

Source:	Reference 4 (Test PL-6) Reference 5 (Benchmark 2a)
Elements:	Truss element, master-slave link
Attribute:	Node temperature
Keywords:	Plasticity, kinematic hardening

---

The bars in this model are under different thermal loading in addition to the point force. Cyclic temperature changes are applied to the bars. Three different tests are conducted.

Model data:

For Tests A and B:

Constant force	$F = 15.0 \text{ N}$
Length of the bars	$L = 100 \text{ mm}$
Cross-section area	$A = 1.0 \text{ mm}^2$
Young's modulus	$E = 10.0 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$
Thermal expansion	$\alpha = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$
Yield stress	$\sigma_y = 10.0 \text{ N/mm}^2$
Tangent modulus	$E_T = 1.0 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$ (after yield for kinematic hardening)

For Test C:

Constant force	$F = 700.0 \text{ N}$
Length of the bars	$L = 100 \text{ mm}$
Bar 1	
Cross-section area	$A = 1.0 \text{ mm}^2$
Young's modulus	$E = 100.0 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$
Thermal expansion	$\alpha = 2.0 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$
Yield stress	$\sigma_y = 500.0 \text{ N/mm}^2$
Tangent modulus	$E_T = 50.0 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$ (after yield for kinematic hardening)
Bar 2	
Cross-section area	$A = 0.75 \text{ mm}^2$
Young's modulus	$E = 200.0 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$
Thermal expansion	$\alpha = 1.0 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$
Yield stress	$\sigma_y = 600.0 \text{ N/mm}^2$
Tangent modulus	$E_T = 12.0 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$ (after yield for kinematic hardening)

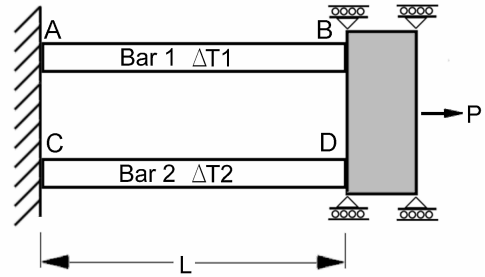


Figure VNS10-1: A two-bar assembly

Two truss elements are used in this two-dimensional problem. Points A and C are fixed in both the X and Y directions, and points B and D are fixed in the Y direction. Horizontal displacements of point B and D are connected with a master-slave link so that the two points will move together in the X direction.

For the three tests conducted, oscillating temperature changes are applied to the bars while the point force is kept constant as shown in Table VNS10-1.



Increment	Force P (N)	Test A		Test B		Test C	
		$\Delta T_1(^{\circ}\text{C})$	$\Delta T_2(^{\circ}\text{C})$	$\Delta T_1(^{\circ}\text{C})$	$\Delta T_2(^{\circ}\text{C})$	$\Delta T_1(^{\circ}\text{C})$	$\Delta T_2(^{\circ}\text{C})$
1	15.0	0	0	0	0	0	0
2	15.0	-100	0	-300	0	-300	-150
3	15.0	+100	0	+300	0	+300	+150
4	15.0	-100	0	-300	0	-300	-150
5	15.0	+100	0	+300	0	+300	+150
.							
.							
.							
20	15.0	-100	0	-300	0	-300	-150

Table VNS10-1: Loading conditions for increments

### (1) Test A – Elastic shakedown

In this test, the range of temperature change in Bar 1 is  $\pm 100^{\circ}\text{C}$ . After a sufficient number of cycles, the axial stress in the two bars remains in the elastic range ( $2.5 \sim 12.5 \text{ N/mm}^2$ ).

Results for the axial forces in the bars and the total strain are presented in Table VNS10-2 and Figures VNS10-2 and VNS10-3. Note that the values for the first 11 increments are identical to the analytical solution given in Reference 5.

Increment	Axial Force (N)		Strain ( $10^{-4}$ )	Increment	Axial Force (N)		Strain ( $10^{-4}$ )
	Bar 1	Bar 2			Bar 1	Bar 2	
1	7.500	7.500	7.500	12	12.225	2.775	22.250
2	10.455	4.545	4.545	13	2.725	12.275	32.750
3	4.174	10.826	18.264	14	12.316	2.684	23.159
4	11.131	3.869	11.307	15	2.651	12.349	33.494
5	3.620	11.380	23.797	16	12.377	2.623	23.768
6	11.583	3.417	15.834	17	2.601	12.399	33.992
7	3.250	11.750	27.500	18	12.418	2.582	24.175
8	11.886	3.114	18.864	19	2.567	12.433	34.325
9	3.002	11.998	29.980	20	12.445	2.555	24.448
10	12.089	2.911	20.892	21	2.545	12.455	34.548
11	2.836	12.164	31.639				

Table VNS10-2: Force and strain results for Test A

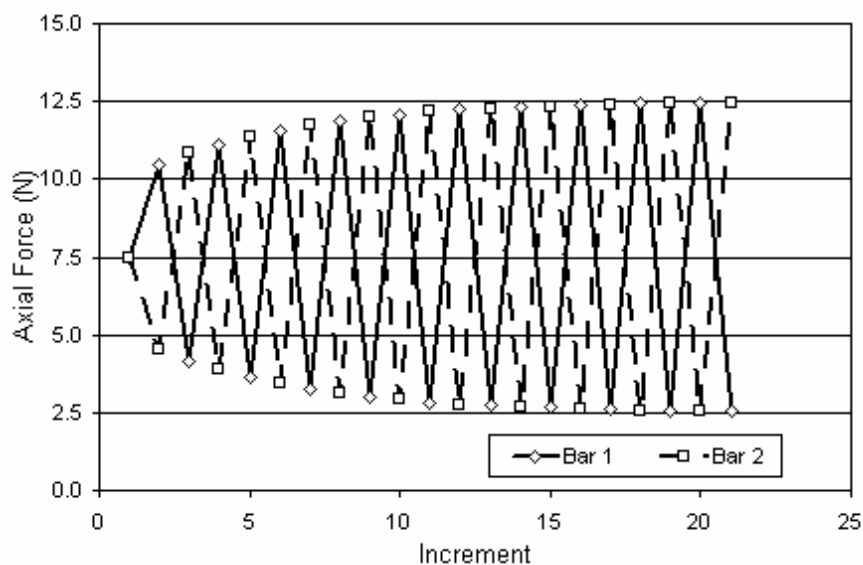


Figure VNS10-2: Axial force results for Test A

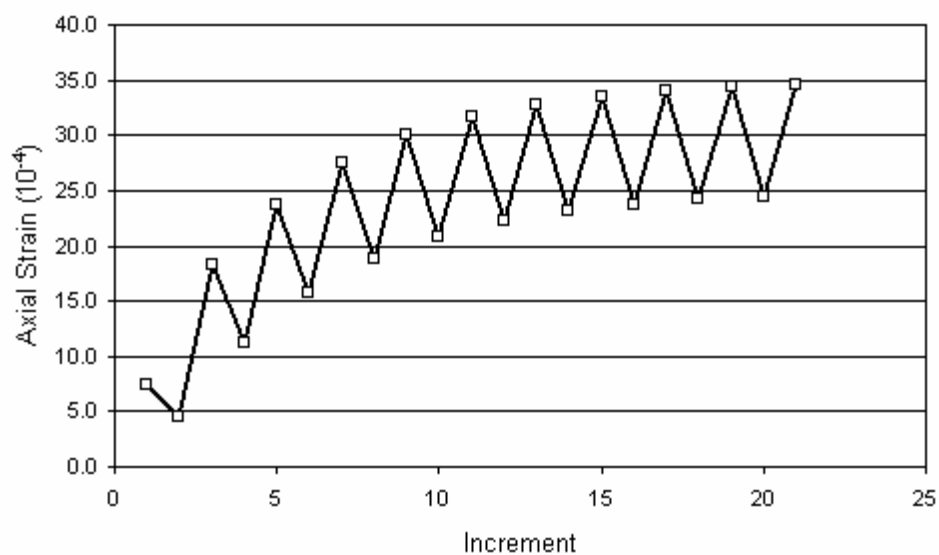


Figure VNS10-3: Total axial strain results for Test A

## (2) Test B – Alternating Plasticity

In this test, the range of temperature change in Bar 1 has been increased to  $\pm 300^\circ\text{C}$ . After a sufficient number of cycles, the axial stresses in the two bars will vary in the range of  $-3.0 \sim 18.0 \text{ N/mm}^2$ , resulting in alternating plastic deformation in the bars.

Results for the axial forces in the bars and the total strain are presented in Table VNS10-3 and Figures VNS10-4 and VNS10-5. Note that the values for the first 11 increments are identical to the analytical solution given in Reference 5.

Increment	Axial Force		Strain ( $10^{-4}$ )	Increment	Axial Force		Strain ( $10^{-4}$ )
	Bar 1	Bar 2			Bar 1	Bar 2	
1	7.500	7.500	7.500	12	18.000	-3.000	60.000
2	12.273	2.727	2.727	13	-3.000	18.000	90.000
3	0.868	14.132	51.322	14	18.000	-3.000	60.000
4	15.654	-0.654	36.536	15	-3.000	18.000	90.000
5	-1.898	16.898	78.984	16	18.000	-3.000	60.000
6	17.917	-2.917	59.169	17	-3.000	18.000	90.000
7	-3.000	18.000	90.000	18	18.000	-3.000	60.000
8	18.000	-3.000	60.000	19	-3.000	18.000	90.000
9	-3.000	18.000	90.000	20	18.000	-3.000	60.000
10	18.000	-3.000	60.000	21	-3.000	18.000	90.000
11	-3.000	18.000	90.000				

Table VNS10-3: Force and strain results for Test B

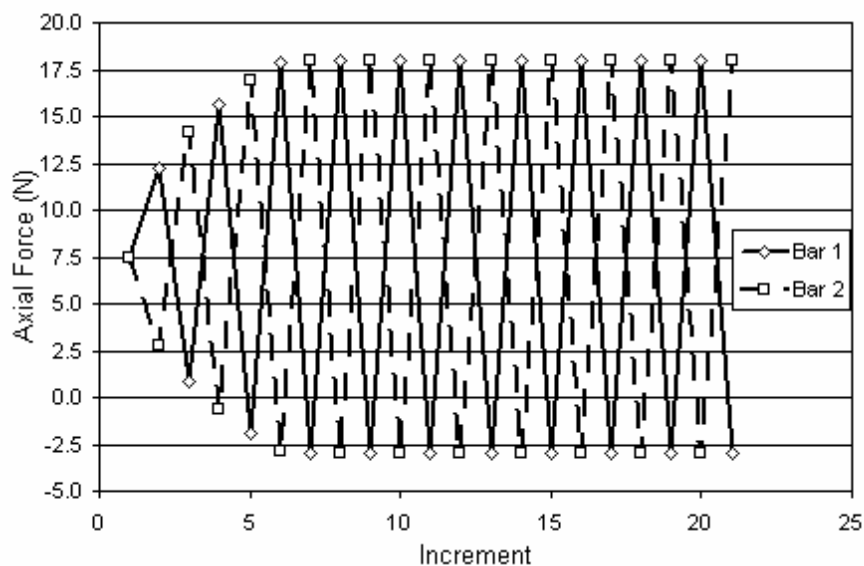


Figure VNS10-4: Axial force results for test B

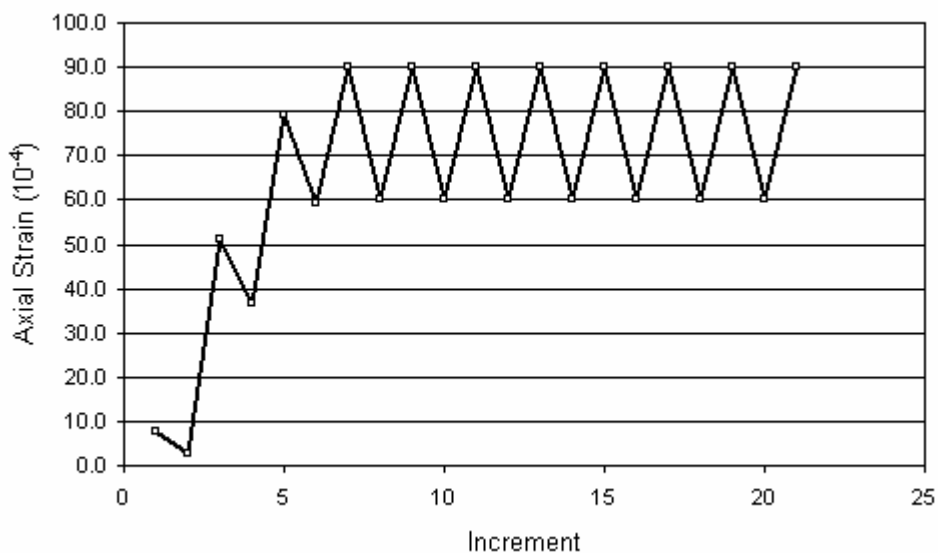


Figure VNS10-5: Axial strain results for test B

### (3) Test C – Elastic Shakedown

In this test, the two bars are made of different materials and have different cross-sectional areas. Also, both of the bars are under cyclic temperature variation. After a sufficient number of cycles, the stresses in the two bars will vary in different ranges. For Bar 1, the axial force range is 176.51 ~ 716.51 *N*, while for Bar 2, the range is -16.51 ~ 523.49 *N*.

Results for the axial forces in the bars and the total strain are presented in Table VNS10-4 and Figures VNS10-6 and VNS10-7. Note that the values for the first 11 increments are identical to the analytical solution given in Reference 5.

Increment	Axial Force		Strain (10 <sup>-3</sup> )	Increment	Axial Force		Strain (10 <sup>-3</sup> )
	Bar 1	Bar 2			Bar 1	Bar 2	
1	280.0	420.0	2.800	12	649.6	50.4	13.961
2	507.8	192.2	-0.219	13	199.1	500.9	21.456
3	236.3	463.7	9.066	14	663.6	36.4	15.360
4	549.8	150.2	3.976	15	195.5	504.5	22.678
5	225.3	474.7	12.732	16	674.8	25.2	16.483
6	583.4	116.6	7.344	17	192.5	507.5	23.660
7	216.5	483.5	15.675	18	683.8	16.2	17.384
8	610.5	89.5	10.048	19	190.2	509.8	24.447
9	209.4	490.6	18.037	20	691.1	8.9	18.108
10	632.2	67.8	12.218	21	188.3	511.7	25.080
11	203.7	496.3	19.934				

Table VNS10-4: Force and strain results for Test C

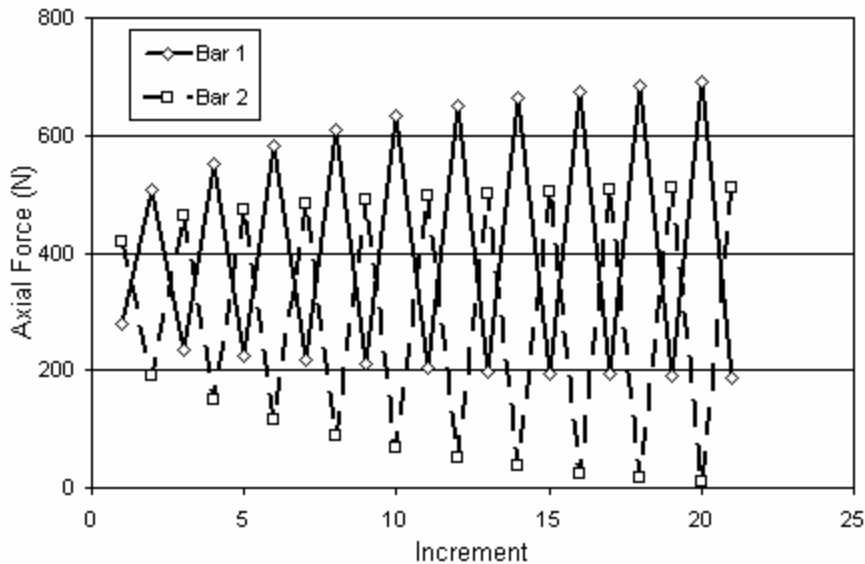


Figure VNS10-6: Axial force results for Test C

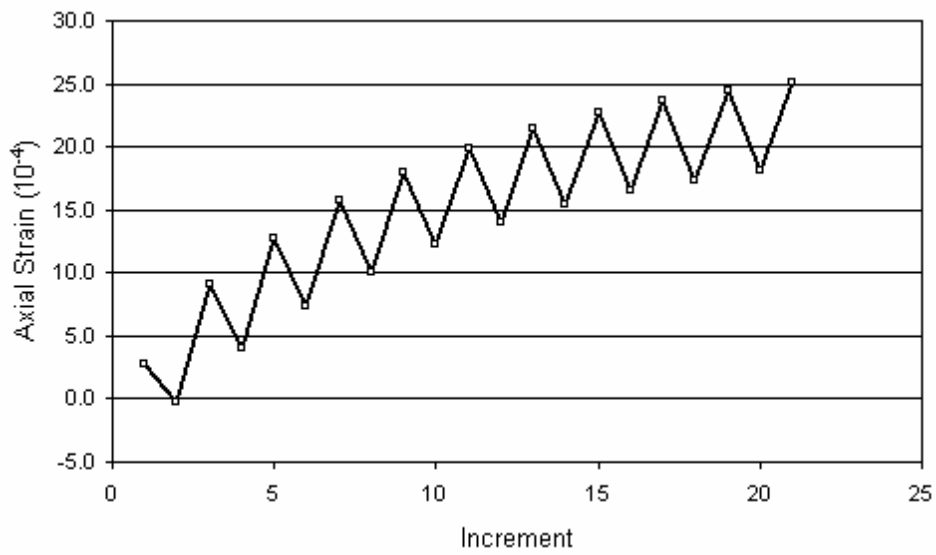


Figure VNS10-7: Axial strain results for Test C

## VNS11: Rigid Punch Plasticity

Source: Reference 4 (Test PL-7) and Reference 5 (Benchmark 5)  
 Elements: Plane strain element  
 Attribute: Prescribed nodal displacement  
 Keywords: Rigid punch, plasticity, isotropic hardening,

A rigid punch is pressed into a deep plate of finite width supported on a frictionless plane. The contact between the punch and the plate is also assumed to be frictionless. The load values and stresses at point F are determined.

### Geometry data:

Plate thickness  $H = 160 \text{ mm}$   
 Punch half width  $W_1 = 80 \text{ mm}$   
 Model width  $W_2 = 200 \text{ mm}$   
 F position  $L = 20 \text{ mm}$

### Material data:

Young's modulus  $E = 1.0 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$   
 Yield stress  $\sigma_y = 1.0 \text{ N/mm}^2$  (von Mises)  
 Tangent modulus  $E_T = 0.1 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$

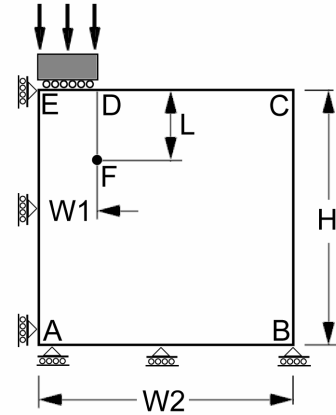


Figure VNS11-1: A rigid punch

A mesh consisting of 20 by 16 8-node plane strain elements of equal size is used to model the plate. Node restraint with prescribed vertical displacement is used to model the punch action. The maximum movement of the punch is 0.24 mm and is applied in 6 increments.

The Straus7 results are generally in good agreement with the reference solution values.

The stress results for node F are calculated based on stress values at the Gauss points of the element at its upper right. Reduced 2x2 Gauss integration is used.

Punch deflection	Reference 5	Straus7
0.04	29.59	29.79 (0.68%)
0.12	85.94	87.03 (1.27%)
0.14	98.33	99.72 (1.40%)
0.16	103.7	105.21 (1.46%)
0.18	105.8	107.31 (1.43%)
0.24	108.8	110.25 (1.33%)

Table VNS11-1: Load result summary - perfect plasticity

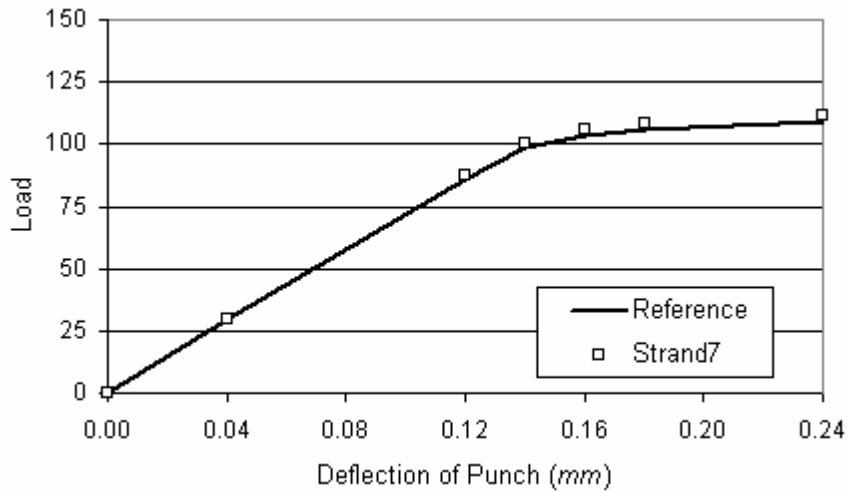


Figure VNS11-2: Load-deflection curves for perfect plasticity model

Inc	$S_{xx}$			$S_{yy}$			$S_{xy}$			$S_{vm}$		
	Ref 5	Straus7		Ref 5	Straus7		Ref 5	Straus7		Ref 5	Straus7	
1	-0.033	-0.0392	(18.8%)	-0.3396	-0.3362	(-1.0%)	0.1089	0.1245	(14.3%)	0.3335	0.3439	(3.1%)
2	-0.0646	-0.0243	(-63.4%)	-0.7306	-0.6684	(-8.5%)	0.3722	0.4495	(20.8%)	0.8788	0.9708	(10.5%)
3	-0.1163	-0.0698	(-40.0%)	-0.7723	-0.7540	(-2.4%)	0.4329	0.5217	(20.5%)	0.956	1.0962	(14.7%)
4	-0.1693	-0.1601	(-5.4%)	-0.8233	-0.9173	(11.4%)	0.4523	0.4978	(10.1%)	0.9846	1.0984	(11.6%)
5	-0.1983	-0.2167	(9.3%)	-0.8577	-1.0497	(22.4%)	0.4486	0.4796	(6.9%)	0.9837	1.1105	(12.9%)
6	-0.2032	-0.3503	(72.4%)	-0.9442	-1.2414	(31.5%)	0.4411	0.4750	(7.7%)	1.0173	1.1302	(11.1%)

Table VNS11-2: Stress results for perfect plasticity

Punch deflection	Reference 5	Straus7
0.04	29.59	29.79 (0.68%)
0.12	86.84	87.56 (0.83%)
0.14	100.0	100.84 (0.84%)
0.16	107.9	108.53 (0.58%)
0.18	112.5	113.05 (0.49%)
0.24	122.6	123.08 (0.39%)

Table VNS11-3: Load result summary - isotropic hardening



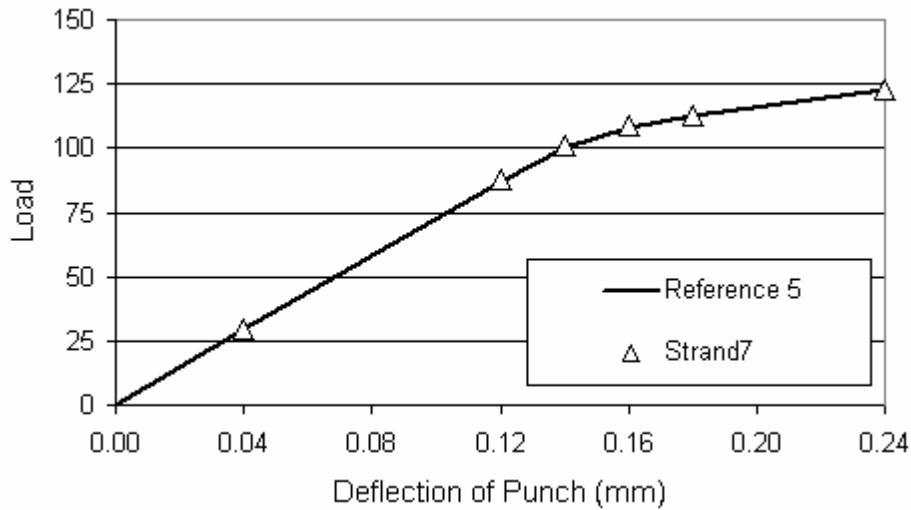


Fig VNS11-3: Load-deflection curves for isotropic hardening model

Inc	S <sub>XX</sub>			S <sub>YY</sub>			S <sub>XY</sub>			S <sub>VM</sub>		
	Ref 5	Straus7		Ref 5	Straus7		Ref 5	Straus7		Ref 5	Straus7	
1	-0.0330	-0.0392	(-2.1%)	-0.3400	-0.3362	(-1.1%)	0.1087	0.1245	(14.5%)	0.3337	0.3439	(3.1%)
2	-0.0696	-0.0378	(-45.7%)	-0.8253	-0.7367	(10.7%)	0.3557	0.4247	(19.4%)	0.9153	0.9677	(5.7%)
3	-0.1104	-0.0893	(-19.1%)	-0.8770	-0.8364	(4.6%)	0.4255	0.4798	(12.8%)	1.0140	1.0701	(5.5%)
4	-0.1483	-0.1470	(-0.9%)	-0.9578	-0.9394	(-1.9%)	0.4365	0.4780	(9.5%)	1.0410	1.0886	(4.6%)
5	-0.1652	-0.1640	(-0.7%)	-1.0020	-0.9810	(-2.1%)	0.4614	0.4863	(5.4%)	1.0830	1.1069	(2.2%)
6	-0.1877	-0.2231	(18.9%)	-1.0830	-1.0582	(-2.3%)	0.5248	0.5538	(5.5%)	1.1950	1.2035	(0.7%)

Table VNS11-4: Stress results for isotropic hardening

## VNS12: Axisymmetric Thick Cylinder

Source: Reference 7 (NL-2)  
 Elements: Axisymmetric element  
 Keywords: Perfect plasticity, constitutive model test

A thick cylinder under internal pressure is analysed.

Material data:

Young's modulus  $E = 207,000 \text{ N/mm}^2$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$   
 Yield stress  $\sigma_y = 207.9 \text{ N/mm}^2$   
 (von Mises)

Load data:

The internal pressure is increased from  $80 \text{ N/mm}^2$  to  $160 \text{ N/mm}^2$  in steps of  $20 \text{ N/mm}^2$

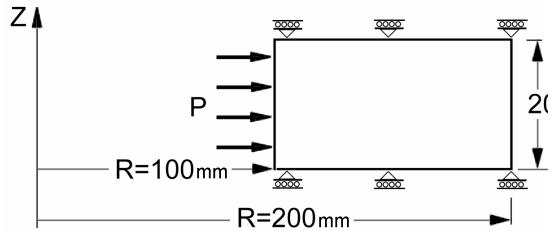


Figure VNS12: A thick cylinder

Reduced  $2 \times 2$  Gauss integration is used for the calculation of element matrices. All the results for stresses at element Gauss points presented in Tables VNS12-1 and VNS12-2 are practically the same as the values presented in Reference 7.

Radius (mm)	Pressure (N/mm <sup>2</sup> )				
	80	100	120	140	160
104.2	-71.553	-89.721	-110.046	-130.050	-150.053
115.8	-52.891	-66.644	-84.871	-104.854	-124.858
124.2	-42.465	-53.469	-68.321	-87.923	-107.922
135.8	-31.186	-39.267	-50.174	-66.663	-86.606
146.3	-23.159	-29.161	-37.261	-49.513	-68.611
163.7	-13.143	-16.549	-21.146	-28.099	-41.943
176.3	-7.643	-9.624	-12.297	-16.340	-24.553
193.7	-1.769	-2.227	-2.846	-3.781	-5.682

Table VNS12-1: Radial stress results (N/mm<sup>2</sup>)

Radius (mm)	Pressure (N/mm <sup>2</sup> )				
	80	100	120	140	160
104.2	124.886	149.967	129.997	109.978	89.923
115.8	106.225	133.706	154.727	135.174	115.188
124.2	95.798	120.623	154.128	151.861	132.136
135.8	84.519	106.421	135.981	172.255	153.290
146.3	76.493	96.314	123.068	163.535	170.859
163.7	66.476	83.703	106.953	142.121	195.888
176.3	60.976	76.777	98.104	130.362	195.883
193.7	55.102	69.381	88.653	117.803	177.012

Table VNS12-2: Circumferential stress results (N/mm<sup>2</sup>)

## VNS13: Nonlinear Equation Solution Test - Overlay Model

Source: Reference 6 (Section 3)  
 Elements: Plane stress element, master/slave link  
 Keywords: Overlay model, perfect plasticity

This test is designed to check the ability of the solver to solve nonlinear equations. In order to generate a suitable mesh, an overlay model is used. Three layers of equal size square elements are 'welded' together at the nodes, and point forces are applied at one edge, as shown in Figure VNS13-1.

Element	Young's modulus	Poisson's ratio	Yield stress	Hardening constant
1	100,000	0.25	3.0	0.0
2	60,000	0.25	6.0	0.0
3	40,000	0.25	8.0	0.0

Table VNS13-1: Material data used

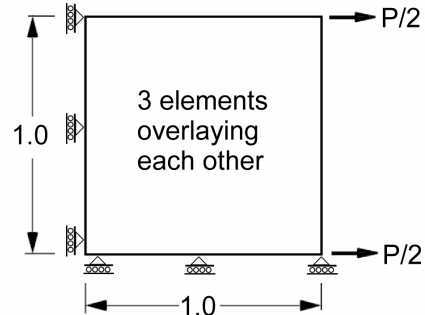


Figure VNS13-1: Overlay plate model

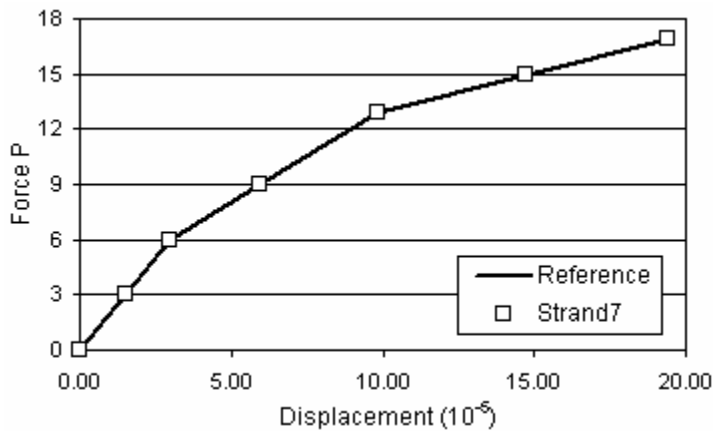


Figure VNS13-2: Force-displacement curves

Load	Reference 5	Straus7
3.00	1.500000	1.500000 (0.00%)
6.00	3.000000	3.000000 (0.00%)
9.00	5.932835	5.940311 (0.13%)
12.95	9.845833	9.848612 (0.03%)
15.00	14.74781	14.763444 (0.11%)
16.93	19.41957	19.440252 (0.11%)

Table VNS 13-2: Deflection results ( $\times 10^{-5}$ )

Load	Element 1		Element 2		Element 3	
	$S_{XX}$	$S_{YY}$	$S_{XX}$	$S_{YY}$	$S_{XX}$	$S_{YY}$
3.00	1.5000000	0.0000000	0.9000000	0.0000000	0.6000000	0.0000000
6.00	3.0000000	0.0000000	1.8000000	0.0000000	1.2000000	0.0000000
9.00	3.1290021	0.2772523	3.5225987	-0.1663514	2.3483992	-0.1109009
12.95	3.2339512	0.5417221	5.8306871	-0.3253889	3.8853616	-0.2163332
15.00	3.2156062	0.4920461	6.0040596	0.0081274	5.7803342	-0.5001735
16.93	3.2146417	0.4894831	6.1276119	0.2639346	7.5877464	-0.7534176

Table VNS 13-3: Element stress results

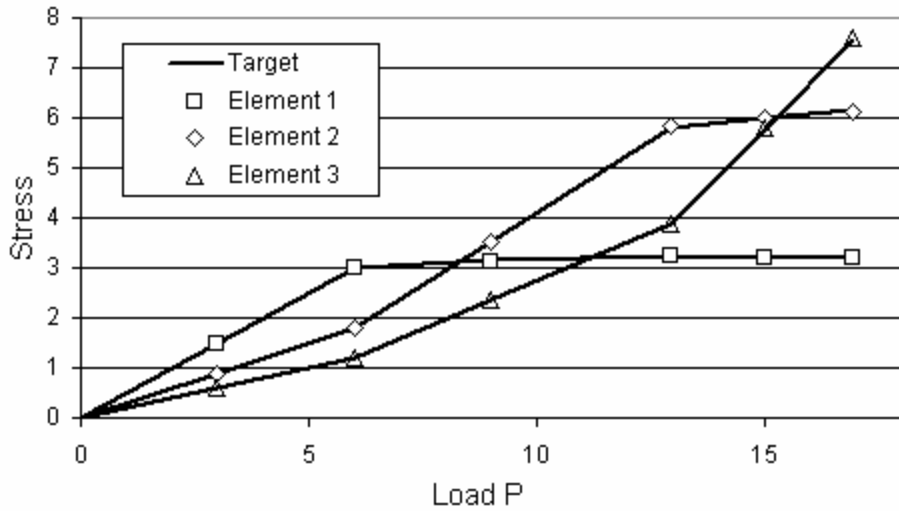


Figure VNS13-3: Stress-load curves

## VNS14: Square Plate Under Uniform Pressure

Source: Reference 5 (NL-7)  
 Elements: Plate/shell element  
 Attribute: Plate face pressure  
 Keywords: Perfect plasticity, simply supported, square plate

A simply supported plate is under uniform distributed load. The plate is loaded beyond yield.

Geometry data:

Plate dimension 40 mm × 40 mm square  
 Plate thickness 0.4 mm

Material data:

Young's modulus  $E = 3.0 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$   
 Yield stress  $\sigma_y = 30.0 \text{ N/mm}^2$  (von Mises)  
 Number of layers 13

A quarter of the plate is modelled with a mesh of 4×4 8-node plate elements. The results for the deflection at the plate centre are presented in Table VNS14-1 and Figure VNS14-2.

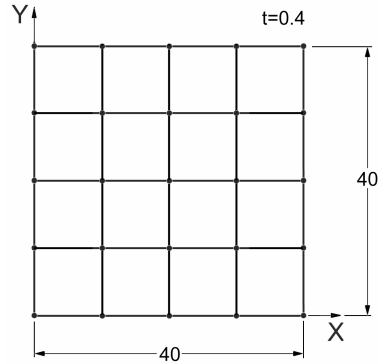


Figure VNS14-1: Square plate under pressure

Load ( $10^{-2} \text{ MPa}$ )	Target solution	Straus7
0.0000	0.0000	0.0000
1.1960	0.7184	0.7183
1.4820	0.9977	0.9938
1.5960	1.2130	1.2093
1.7280	1.7360	1.7714
1.8050	2.5900	2.8289
1.8370	3.2960	4.0199
1.8610	4.2940	10.4910
1.8770	5.7010	*

TableVNS14-1: Results for deflection at plate centre (mm)

\* Plate collapse at 1.8667.

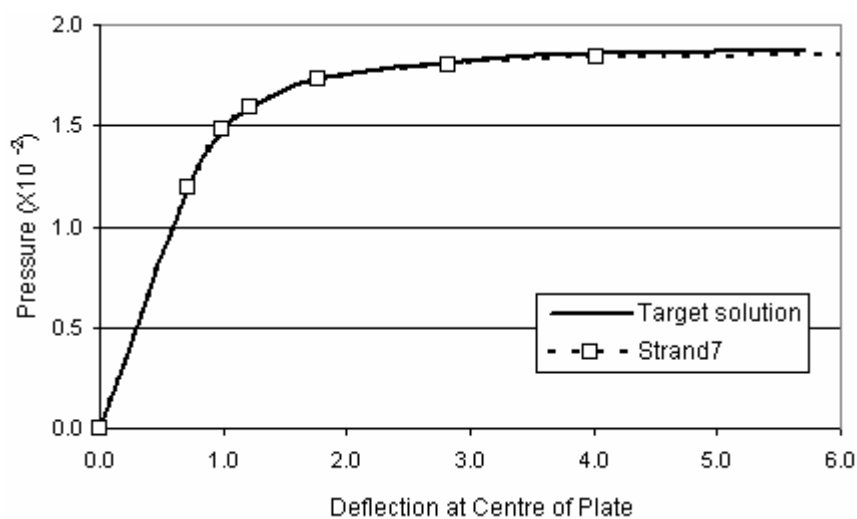


Figure VNS14-2: Deflection-load curves

# VNS15: Large Deflection Analysis of a Curved Cantilever

Source: Reference 8  
 Elements: Beam element  
 Keywords: Geometric nonlinearity, large deflection

A 45° circular cantilever is under a concentrated load normal to the plane in which it lies (all dimensions in inches).

Material data:

Young's modulus  $E = 1 \times 10^5 \text{ psi}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.0$

The curved beam is modelled with 10 straight beam elements and the results are presented in Figure VNS15-2. These results are in good agreement with the results presented in the literature (Reference 8).

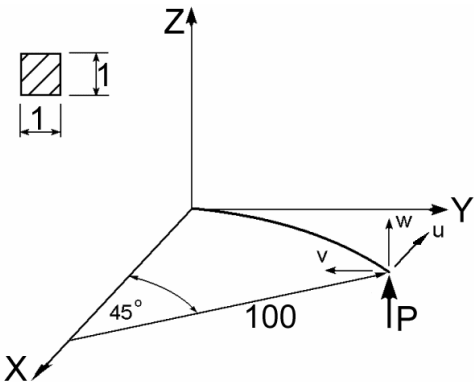


Figure VNS15-1: Curved cantilever

$PR^2/EI$	$u/R$	$v/R$	$w/R$
1	0.0094	0.0157	0.1526
2	0.0316	0.0531	0.2756
3	0.0571	0.0965	0.3644
4	0.0810	0.1378	0.4272
5	0.1018	0.1743	0.4724
6	0.1196	0.2060	0.5059
7	0.1347	0.2334	0.5315

Table VNS15: Non-dimensional displacement results

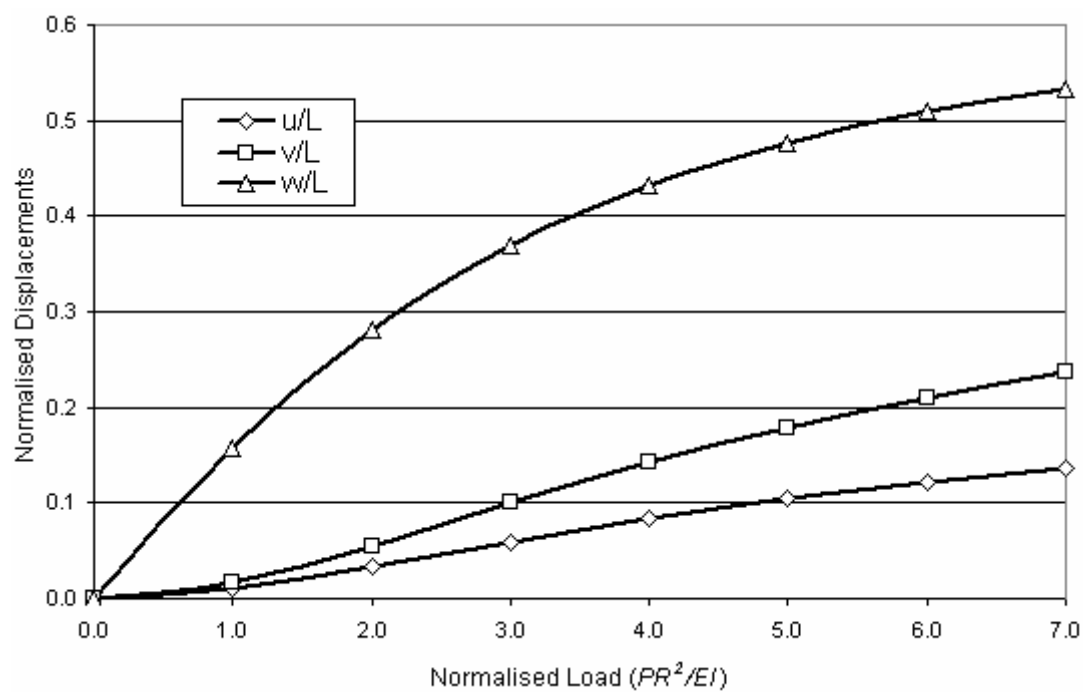


Figure VNS15-2: Non-dimensional displacement results



## VNS16: Toggle Mechanism

Source: Reference 9 (Problem VM195)  
 Elements: Beam, truss and spring elements  
 Attribute: Node temperature  
 Keywords: Toggle mechanism, actuator, thermal expansion, and geometric nonlinearity

A linear actuator is used to move the toggle mechanism in Figure VNS16. The maximum force exerted by the mechanism upon the spring occurs when the lower links are collinear and parallel to the input lever, which means that the actuator must expand a distance of 2.4928 m. The force required to lock the toggle mechanism is determined.

The actuator is modelled with a spring element subjected to thermal loading, which makes the spring expand. The top of the mechanism is modelled with two beam elements and the rest with three truss elements.

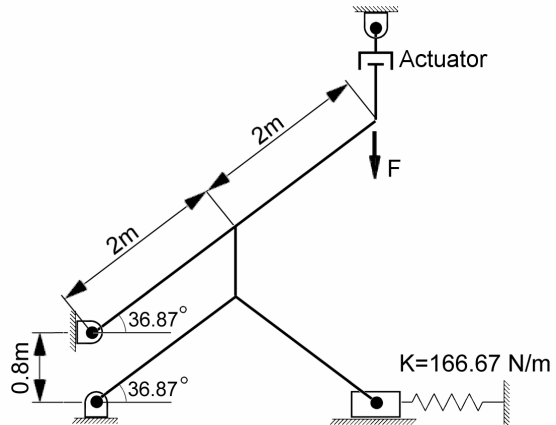


Figure VNS16: A toggle mechanism

A nodal temperature attribute is used to apply the thermal load on the spring element for the actuator. As a thermal expansion coefficient of 2.4928 is assigned to the spring, a unit temperature change of  $+1^{\circ}\text{C}$  is applied to both ends of the spring element such that with a unit load factor, the spring will expand 2.4928m. The problem is solved with the nonlinear geometry option set and the load factors applied as in Table VNS16-1. The numerical results are summarised in Table VNS16-2.

Increment	1	2	3	4	5	6
Load factor	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.02

Table VNS16-1: Load factors

	Theoretical	ANSYS	Straus7
$F_{\text{max, spring}}$	-133.33	-133.32	-133.32
UY, node with force	-2.40	-2.41	-2.40
UX, spring	0.80	0.80	0.80

Table VNS16-2: Summary of results

# VNS17: Beam With Gap Lift-Off

Source: Reference 10 (Problem No. V6601S)  
 Elements: Beam and normal gap element  
 Keywords: Boundary nonlinearity, lift-off

A simply supported beam is hinged at one end and supported by lifting rollers at two other locations, allowing lift-off to occur at the rollers. The vertical deflections under the load point are determined.

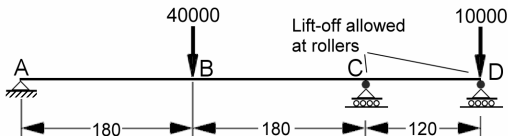


Figure VNS17: Beam with lift-off support

Material data:

Young's modulus  $E = 29 \times 10^6$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$   
 Area  $A = 83.3$   
 Moments of area  $I_1 = 1000$   
 $I_2 = 334$   
 Initial gap axial stiffness  $K = 10 \times 10^6$

This problem uses three beam elements for the main span, and two normal point contact gap elements. The gap elements are used to allow lift-off to occur at the rollers.

This problem is solved with the material nonlinearity option set, and the full load is applied in one increment.

The vertical deflections (DY) at points B and D are determined and summarised in Table VNS17.

	Deflection	
	Point B	Point D
Theory	-1.01	+0.546
MSC/NASTRAN	-1.01	+0.544
Straus7	-1.01	+0.546

Table VNS17: Summary of deflection results

## VNS18: Large Deflection of a Uniformly Loaded Plate

Source: Reference 10 (Problem No. V6401S)  
 Elements: Plate/shell element  
 Keywords: Geometry nonlinearity, large deflection

A square plate with clamped edges is loaded with a uniform surface pressure as shown in Figure VNS18. The lateral deflection at the centre of the plate is determined.

Material data:

Young's modulus  $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$

Geometry data:

Thickness  $t = 1.0 \text{ m}$   
 Edge length  $L = 200.0 \text{ m}$

Load data:

Uniform pressure  $q = 20,000 \text{ Pa}$

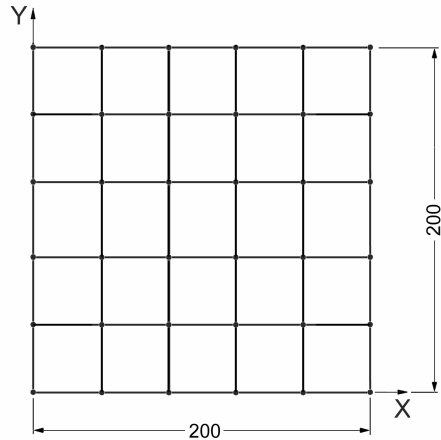


Figure VNS18: Plate under pressure

A quarter of the plate is modelled with 25 4-node and 8-node plate/shell elements, respectively.

This is a geometric non-linear problem. Two load increments are used with load factors of 1.0 and 2.0.

The results for the deflection at the plate centre are summarised below.

Load Factor	Theoretical	MSC/NASTRAN	Straus7 QUAD8	Straus7 QUAD4
1	1.20	1.26	-1.20739	-1.26350
2	1.66	1.75	-1.67315	-1.75712

Table VNS18: Summary of results (m)

# VNS19: Large Deflection Eccentric Compression of a Slender Column

Source: Reference 9 (Problem VM14)  
 Elements: Beam element  
 Keywords: Geometry nonlinearity, large deflection, eccentric compression

A steel column is loaded with an eccentrically applied compressive force of 4000 *lb* as shown. The lateral deflection at the top of the column as well as the maximum tensile and compressive stresses are determined.

Material data:

Young's modulus  $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$

The column is modelled using four beam elements. The eccentricity of the compressive load is achieved by offsetting the beams by an amount equal to 0.58 *in*.

This problem is solved with the geometric nonlinearity set but the material nonlinearity not set. The full load is applied in one increment and the results for the maximum deflection and the maximum compressive and tensile stresses are summarised in Table VNS19.

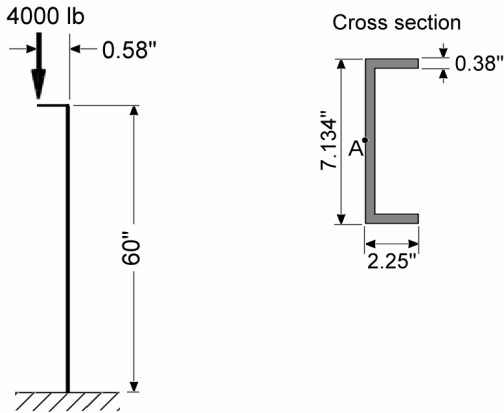


Figure VNS19: A slender column

	Target	ANSYS	Straus7
$\delta_x \text{ (in)}$	0.1264	0.1261	0.1262
$\sigma_{\text{tens}} \text{ (psi)}$	2461	2456	2460
$\sigma_{\text{comp}} \text{ (psi)}$	-2451	-2450	-2451

Table VNS19: Result summary

# VNS20: Large Deflection of Rectangular Plate With Line Load

Source: Reference 11 (Section 11.7.4)  
 Elements: 3D Membrane element  
 Keywords: Geometric nonlinearity, large deflection

A rectangular plate simply supported at the shorter edges is subjected to a line load of 400 N/mm as shown in Figure VNS20-1. The load vs deflection curve for the centre of the plate is determined.

Material data:  
 Young's modulus  $E = 207 \times 10^9 \text{ Pa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$

Geometry data:  
 Length  $L = 400 \text{ mm}$   
 Width  $b = 200 \text{ mm}$   
 Thickness  $t = 0.5 \text{ mm}$

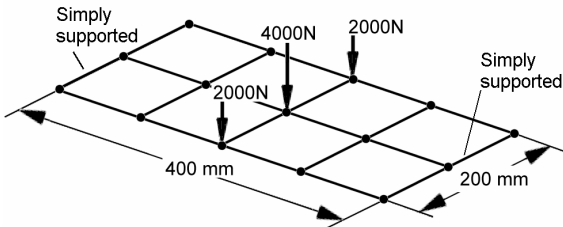


Figure VNS20-1: Plate under line load

The plate is modelled with 4-node and 8-node plate elements as shown. The 400 N/mm line load is specified using equivalent point loads.

Because the plate is very thin, and therefore the bending stiffness is negligible compared with the membrane stiffness, 3D membrane elements are used instead of the plate/shell element. As the membrane force of the plate will mainly support the load a solution with membrane elements proves to be more efficient.

Ten load increments are used to reach the maximum load factor of 10. The first increment is assigned a small load factor of  $10^{-3}$  to generate membrane stiffness. To avoid singularity in the first iteration, a pre-stress of  $10^{-2}$  in the longitudinal direction is assigned to all the plates in an additional load case, which is fully applied in the first load increment only.

Increment	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Load Factor	0.001	0.25	0.5	0.75	1.0	2.8	4.6	6.4	8.2	10.0
MSC/NASTRAN	-	9.115	11.496	13.167	14.497	20.468	24.178	27.017	29.369	31.401
Straus7 – QUAD4	1.444	9.102	11.468	13.127	14.448	20.363	24.027	26.822	29.132	31.123
Straus7 – QUAD8	1.445	9.106	11.473	13.133	14.455	20.373	24.038	26.835	29.145	31.137

Table VNS20: Load factor and numerical results (mm) for all increments

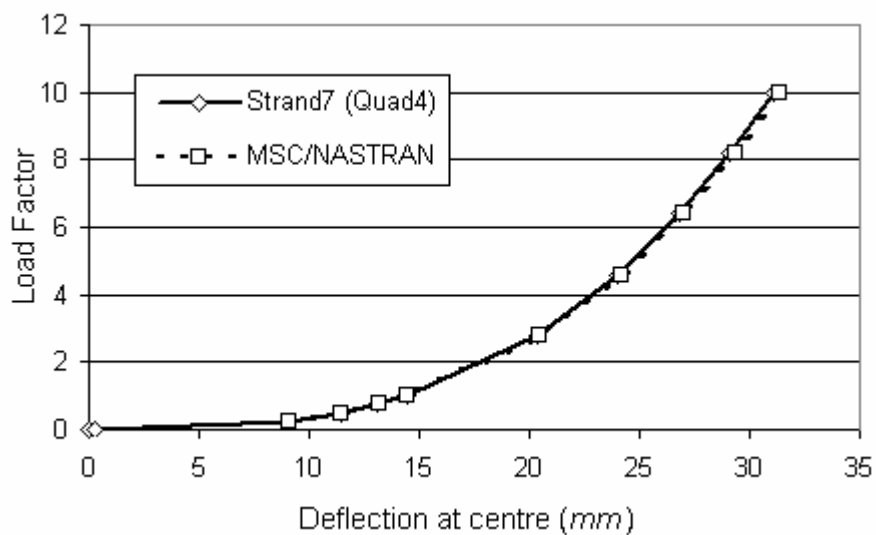


Figure VNS20-2: Deflection vs load curves

## VNS21: Hinged Cylindrical Shell

Source: Reference 12 (Example 6)

Elements: Plate/shell element

Keywords: Hinged cylindrical shell, geometric nonlinearity, large deflection

A cylindrical shell of the form shown is loaded with a central point load acting vertically downward at the centre. The load vs deflection curve for the centre node is determined.

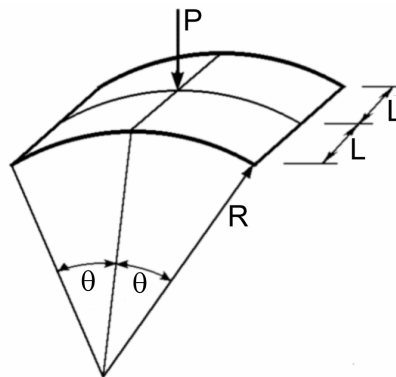


Figure VNS21-1: Hinged cylindrical shell

Material data:

Young's modulus  $E = 3.10275 \times 10^9 \text{ Pa}$

Poisson's ratio  $\nu = 0.3$

Geometry data:

Radius  $R = 2540 \text{ mm}$

Length  $L = 254 \text{ mm}$

Thickness  $t = 12.7 \text{ mm}$

Angle  $\theta = 0.1 \text{ radian}$

Boundary conditions:

On the circular boundaries, hinge support with three translations fixed.

On the straight boundaries, free.

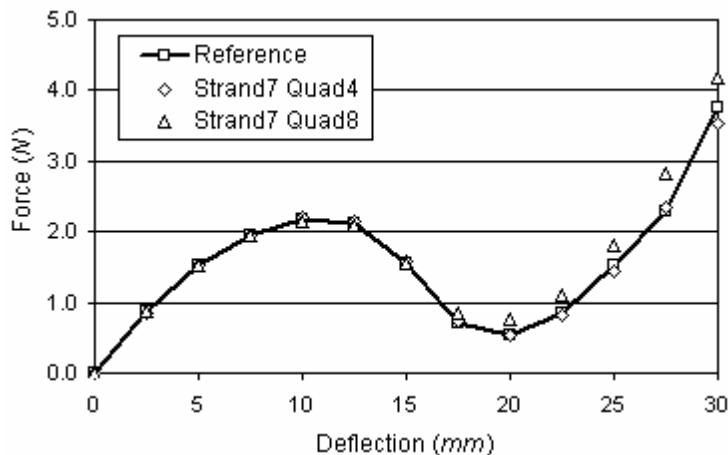


Figure VNS21-2: Deflection vs load curves

Two meshes are used to model a quarter of this cylindrical shell, one with 4 by 4 QUAD4 and the other 2 by 2 QUAD8 elements. Enforced displacement is applied and the corresponding load is recovered as a reaction force.

# VNS22: Propped Cantilever With Gap Beam

Source: Reference 12  
 Elements: Beam, normal and zero gap elements  
 Keywords: Boundary nonlinearity, contact analysis

Three situations are considered for the cantilever shown depending on the value of  $g$ . To model the second and the third case, a normal and a zero gap element are used respectively.

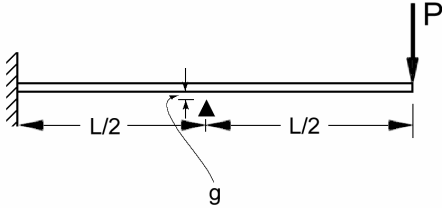


Figure VNS22-1: A propped beam

Material data:

Young's modulus  $E = 20 \times 10^9 \text{ Pa}$   
 Initial gap axial stiffness  $K = 1.0 \times 10^{14} \text{ N/mm}$

Geometry data:

Length  $L = 40 \text{ mm}$   
 Moment of inertia  $I = 833.33 \text{ mm}^4$   
 Gap distance  $g$  (see Table VNS22-1)

Load data:

Point force  $P = 390.625 \text{ kN}$

Case	Description	$g$ value
1	Free cantilever	N/A
2	Propped cantilever	0.0 mm
3	Cantilever with sunken prop	1.0 mm

Table VNS22-1: Three cases of the supports

Only the nonlinearity due to the contact status change is considered in the analysis and five load increments are used, with load factors of 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 and 1.0. All results are accurate to the last digit presented.

Increment	Analytical	Straus7
1	-1.0000	-1.0000
2	-2.0000	-2.0000
3	-3.0000	-3.0000
4	-4.0000	-4.0000
5	-5.0000	-5.0000

Table VNS22-2: Tip deflection results for case 1 (free cantilever) (mm)



Increment	Tip Deflection (mm)	End Reaction (N)	Prop Reaction (N)
1	-0.21875	117187.5	195312.5
2	-0.43750	234375.0	390625.0
3	-0.65625	351562.5	585937.5
4	-0.87500	468750.0	781250.0
5	-1.09375	585937.5	976562.5

Table VNS22-3: Results for case 2 (propped cantilever)

Increment	Tip Deflection (mm)	End Reaction (N)	Prop Reaction (N)
1	-1.00000	78125.0	0
2	-2.00000	156250.0	0
3	-3.00000	234375.0	0
4	-3.37500	156250.1	156249.9
5	-3.59375	39062.7	351562.3

Table VNS22-4: Results for case 3 (cantilever with sunken prop)

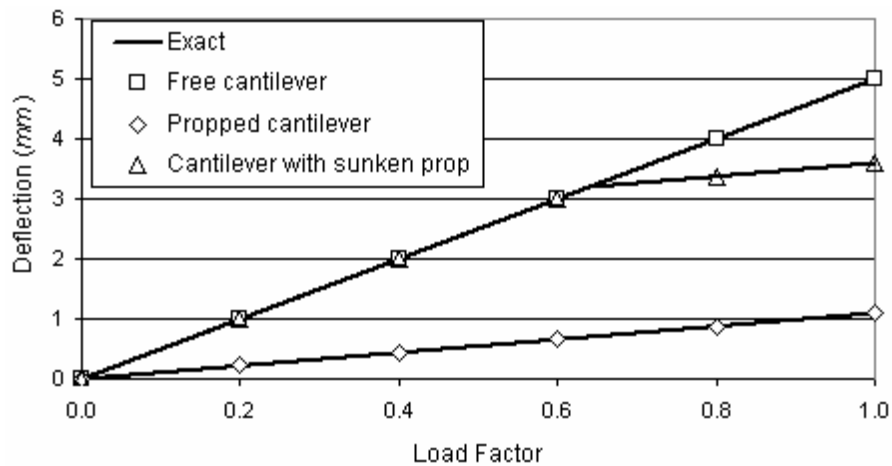


Figure VNS22-2: Tip deflection results

## VNS23: Belt Through a Pulley

Source: Reference 12  
 Elements: Beam and normal gap element  
 Keywords: Pulley, friction contact, contact nonlinearity, contact analysis

A two-dimensional belt passing around a pulley is considered. The tension in the top belt is 10000 *N*. The bottom belt is at an angle of 60 degrees to the horizontal.

The theoretical solution for the tension in the belt can be expressed as:

$$T = T_0 e^{-\mu s/R}$$

where  $T_0$  is the force applied,  $s$  the length of belt between the point where the load is applied and the point where the belt is in contact with the pulley,  $\mu$  the friction coefficient, and  $R$  the radius of the pulley.

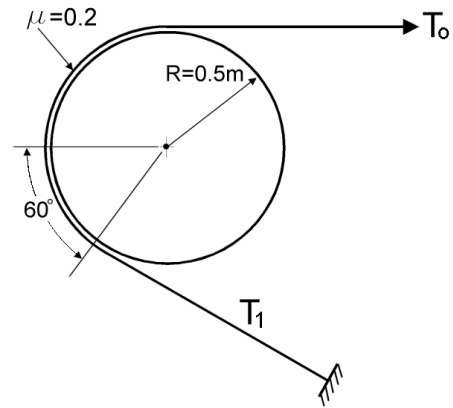


Figure VNS23: Belt and pulley

This problem is modelled using different types of beam elements. The belt is represented with truss elements, and the friction contact between the belt and the surface of the pulley is modelled using normal point contact elements. These contact elements are connected between the truss elements for the belt and nodes on the surface of the pulley. The nodes on the surface of the pulley are fully fixed. The pulley itself is not modelled. The point contact elements are also used to monitor the contact between the pulley and the belt; if one of these elements goes into tension it is assumed that the belt has lifted away from the pulley and the element is removed from the solution. The material constants are summarised in Table VNS23-1.

Element	Belt	Contact
Type	Truss	Normal Point Contact
Stiffness	$E = 1.0 \times 10^9 \text{ Pa}$ , $A = 0.01 \text{ m}^2$	$K = 10.0 \times 10^9 \text{ N/m}$
Friction	$N/A$	$\mu_1 = \mu_2 = 0.2$

Table VNS23-1: Element properties

A point force of 10000 *N* is applied at the end of the horizontal section of belt. The other end of the belt is fully fixed with a nodal restraint.

The problem is solved with the full load applied in one increment. Neither geometric nor material nonlinearity is considered. The results are in good agreement with the analytical solution.

Angle in Contact	$T(s)=T_0 \cdot e^{-\mu s/R}$	Straus7
0°	10000.00	10000.00 (0.00%)
5°	9826.98	9865.59 (0.39%)
15°	9489.87	9526.30 (0.38%)
25°	9164.33	9198.67 (0.37%)
35°	8849.95	8882.31 (0.37%)
45°	8546.36	8576.82 (0.36%)
55°	8253.18	8281.84 (0.35%)
65°	7970.06	7997.00 (0.34%)
75°	7696.65	7721.96 (0.33%)
85°	7432.63	7456.37 (0.32%)
95°	7177.65	7199.92 (0.31%)
105°	6931.43	6952.29 (0.30%)
115°	6693.65	6713.17 (0.29%)
125°	6464.03	6482.28 (0.28%)
135°	6242.28	6259.33 (0.27%)
145°	6028.15	6044.05 (0.26%)
150°	5923.85	5915.70 (-0.14%)

Table VNS23-2: Results for tension in the belt (N)

# VNS24: Elastoplastic Analysis of a Cantilever Bar

Source: Reference 14 (Example 5.1.1)  
 Elements: Beam and truss elements  
 Material: Plasticity with isotropic and kinematic hardening  
 Attribute: Prescribed displacement  
 Keywords: Material nonlinearity, elastoplastic analysis

A bar is fixed at one end and under point force at the other end. Both isotropic and kinematic hardening rules are applied.

Material data:

Young's modulus  $E = 1.0 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$   
 Yield stress  $\sigma_y = 400 \text{ N/mm}^2$   
 Tangent modulus after yield  $E_T = 0.2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$

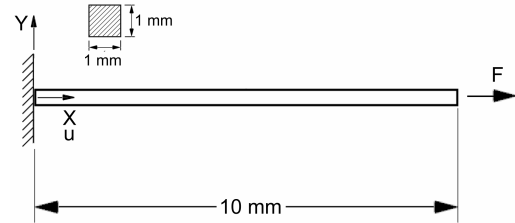


Figure VNS24-1: A cantilever bar

The load is applied through the enforced nodal displacement  $u$ , and the force is calculated as the reaction at the node.

The bar is modelled with both truss and normal beam elements separately, and in both cases, exact results for the force ( $F$ ) are obtained.

Increment	$u \text{ (mm)}$	$F \text{ (N)}$	
		Isotropic hardening	Kinematic hardening
1	0.02	200	200
2	0.04	400	400
3	0.10	520	520
4	0.14	600	600
5	0.10	200	200
6	0.05	-300	-220
7	0.02	-600	-280
8	-0.02	-680	-360
9	-0.08	-800	-480
10	-0.04	-400	-80
11	0.00	0	320
12	0.06	600	440
13	0.08	800	480
14	0.10	840	520
15	0.14	920	600
16	0.12	720	400

Table VNS24: Result summary

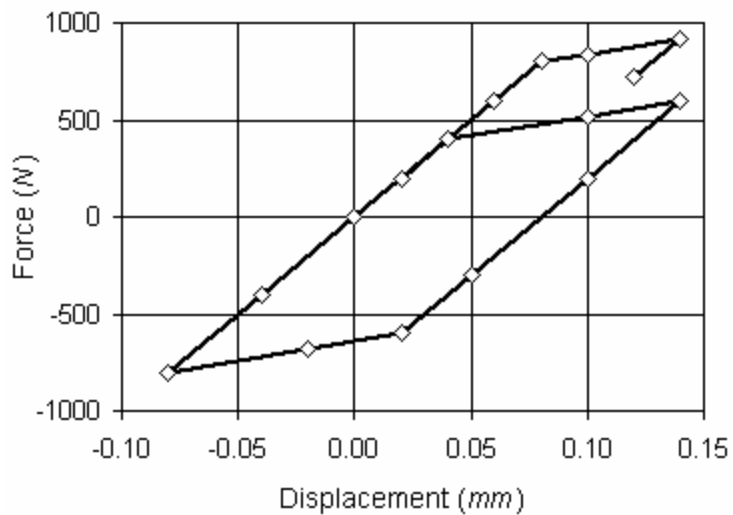


Figure VNS24-2: Force vs displacement curve - isotropic hardening

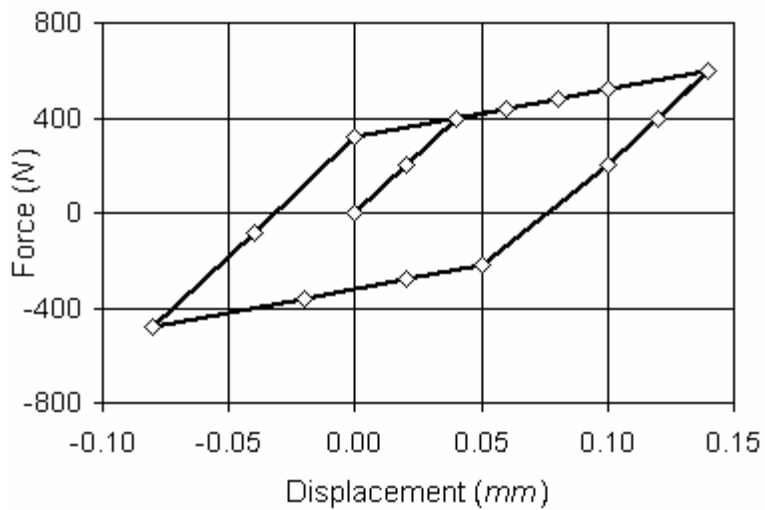


Figure VNS24-3: Force vs displacement curve - kinematic hardening

# VNS25: Takeup Mechanism Under Alternating Load

Source: Reference 14 (Example 5.1.1)  
 Elements: Spring/damper and takeup gap elements, master/slave link  
 Keywords: Contact analysis

The takeup mechanism shown in Figure VNS25-1 takes no compressive force and whenever a tensile force is applied, it will lock itself and resist any tension with a very high stiffness. This mechanism can be modelled with the tension type of takeup element.

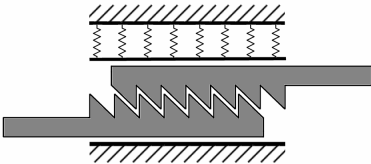


Figure VNS25-1: A take-up element

The parallel system of a takeup mechanism and a spring shown in Figure VNS25-2 is analysed. A compressive load will be supported by the spring and a tensile load will be supported by the takeup mechanism.

Model data:

Spring axial stiffness	$K_s = 1.0$
Takeup initial stiffness	$K = 100.0$
Takeup type	Tension
Takeup dynamic stiffness	Enabled
Load applied	$P = 1.0$

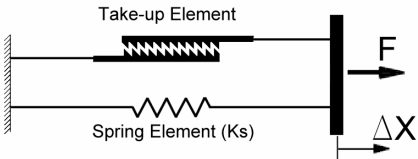


Figure VNS25-2: A cantilever bar

Alternating loads are applied to this system and the results are summarised in Table VNS25.

Load Step	Load (F)	Displacement ( $\Delta x$ )	Element Force	
			Spring	Take-up
1	-1.0	-1.0	-1.0	0.0
2	1.0	-1.0	-1.0	2.0
3	-2.0	-2.0	-2.0	0.0
4	1.0	-2.0	-2.0	3.0

Table VNS25: Summary of results

## VNS26: Cylindrical Hole in an Infinite Mohr-Coulomb Medium

---

Source:	Reference 15 (Problem 3)
Elements:	Axisymmetric and plane strain elements
Material:	Plasticity with Mohr-Coulomb criterion
Attribute:	Plate pre-stress
Keywords:	Material nonlinearity, elastoplastic analysis, Mohr-Coulomb criterion

---

A cylindrical hole of unit radius, in an infinite elastoplastic medium, subjected to a uniform far-field stress, is modelled. The material is an elastic-perfectly-plastic Mohr-Coulomb material.

### Material data:

Young's modulus	$E = 6778 \times 10^6 \text{ Pa}$
Poisson's Ratio	$\nu = 0.21$
Cohesion	$c = 3.45 \times 10^6 \text{ Pa}$
Friction Angle	$\phi = 30^\circ$

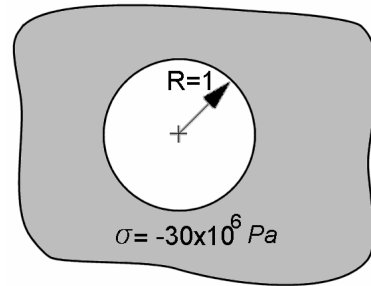


Figure VNS26-1: Infinite medium with a cylindrical hole

### Load data:

- Case 1: a pre-stress of  $-30.0 \times 10^6 \text{ Pa}$  is applied to the three normal stress components of all elements and a normal stress of  $-30.0 \times 10^6 \text{ Pa}$  is applied to the outer boundary.
- Case2: a normal stress of  $-30.0 \times 10^6 \text{ Pa}$  is applied to the inner boundary.

The pre-stressed situation is modelled by applying loads in both cases with a load factor of 1.0. To model the situation when the cylindrical hole is removed, the load factor for case 2 is reduced to 0.0.

### Plane Strain Model

The Straus7 mesh uses 384 Quad8 plane strain plate elements to model one quarter of the infinite medium. The mesh extends 10 metres in both the X and Y directions.

Stress results are compared with theoretical solutions presented in the reference. Note that the stress is normalised by dividing the value by the applied far-field stress ( $-30 \text{ MPa}$ ).

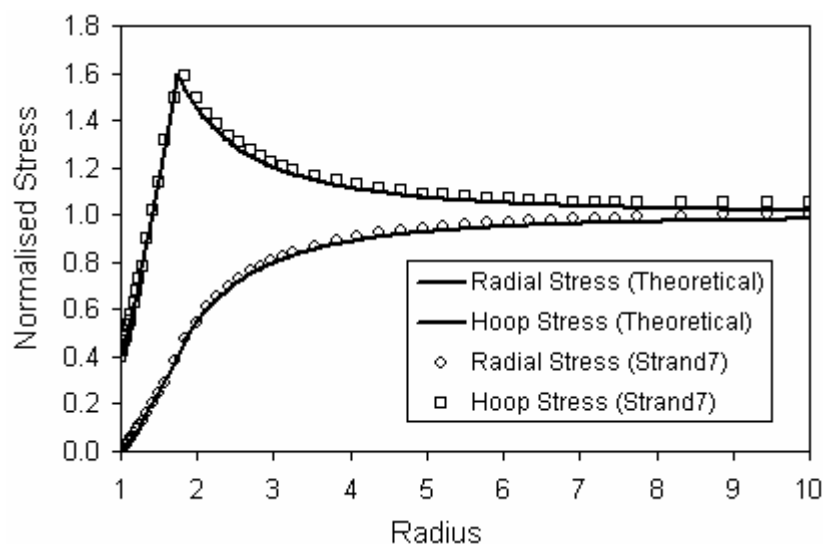


Figure VNS26-2: Stress distribution – plain strain model

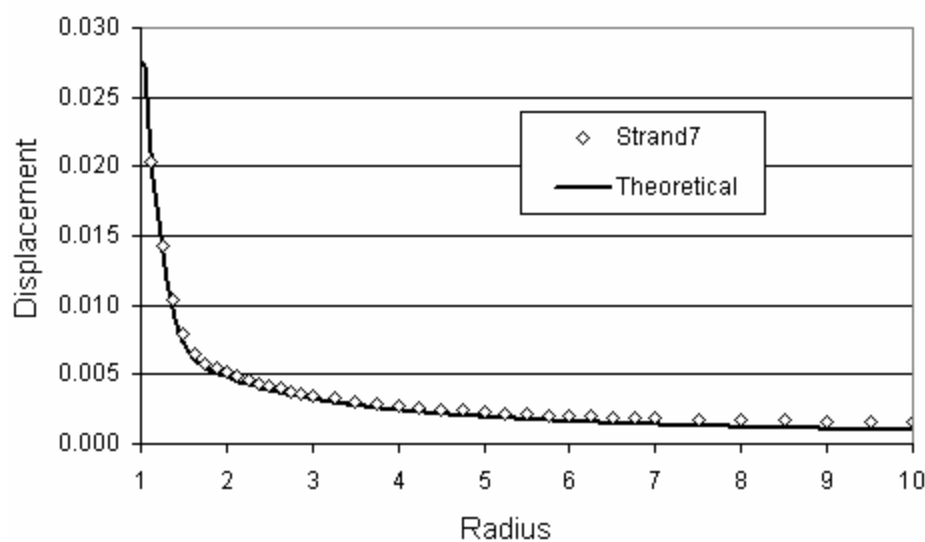


Figure VNS26-3: Radial displacement distribution – plain strain model



### Axisymmetric Model

The Straus7 mesh uses 38 Quad8 axisymmetric plate elements to model one slice of the infinite medium. The mesh extends 10 units in the radial direction and 1 unit in the axial direction.

Stress results are compared with theoretical solutions presented in the reference. The x-axis on the graphs is normalised by dividing the position by the radius of the hole. The stress is normalised by dividing the value by the applied far-field stress ( $-30 \text{ MPa}$ ).

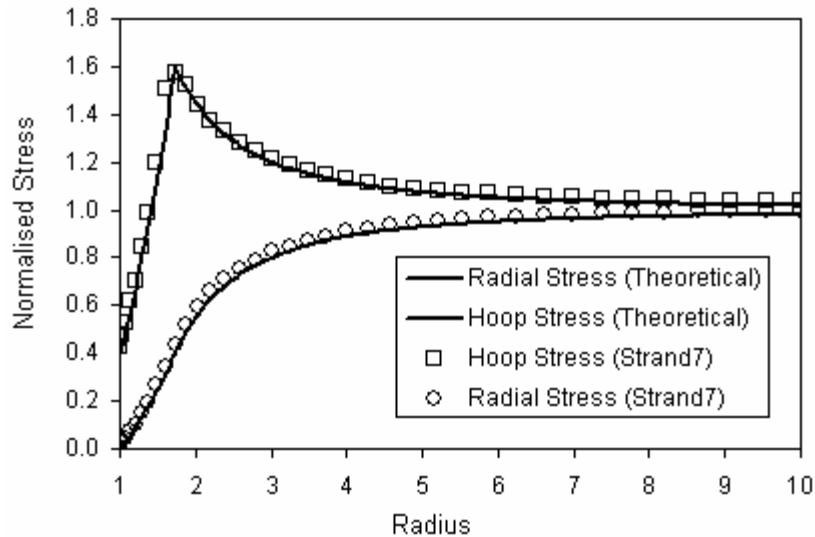


Figure VNS26-4: Stress distribution – axisymmetric element model

## VNS27: Strip Footing on a Mohr-Coulomb Material

---

Source:	Reference 15 (Problem 6)
Elements:	Plane strain elements
Material:	Plasticity with Mohr-Coulomb criterion
Attribute:	Prescribed displacement
Keywords:	Material nonlinearity, elastoplastic analysis

---

A rough, rigid, rectangular footing rests on an elastic-perfectly-plastic Mohr-Coulomb soil material. The property data is as follows:

Material data:

Young's modulus	$E = 257.1429 \times 10^6 \text{ Pa}$
Poisson's ratio	$\nu = 0.28571$
Cohesion	$c = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$
Friction angle	$\phi = 0^\circ$

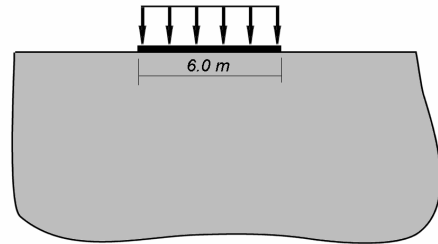


Figure VNS27-1: A strip footing

Load data:

The rigid footing is modelled by enforced nodal restraints. The nodes representing the footing are progressively pressed into the soil. As the footing is assumed to be rough, the horizontal displacement of the nodes representing the footing is prevented.

The Straus7 mesh uses 200 Quad8 plane strain elements to model one symmetric half. The mesh extends 20 units in the horizontal direction and 10 units in the vertical direction.

The results are presented via a graph showing the vertical displacement as a function of applied pressure. The applied pressure is calculated by summing the vertical node reactions at the nodes with enforced restraints and dividing this force sum by the area underneath the footing. Note that a contact length of 3.5 m is used for the coarse mesh, as one element is restrained at one node only. In the fine mesh, a contact length of 3.25 m is used, due to the smaller element size. The theoretical bearing capacity  $q$ , is given by  $q = c(2+\pi)$  where  $c$  is the cohesion. In this case the theoretical value is 514 kPa.

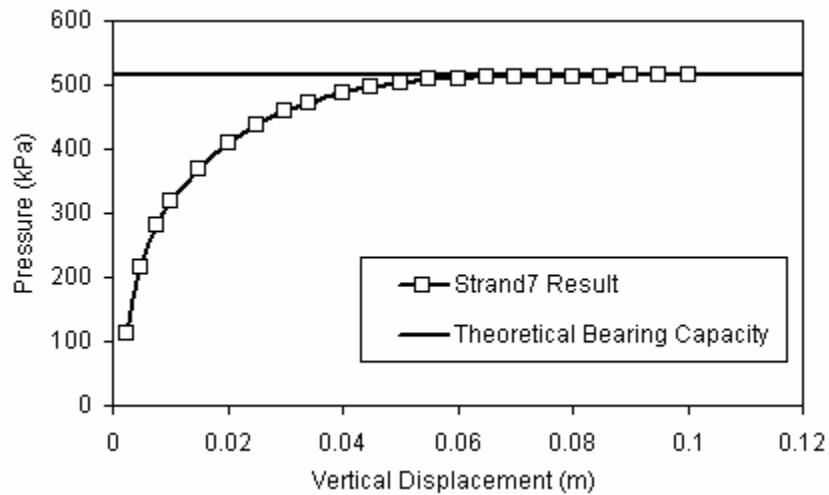


Figure VNS27-2: Vertical displacement vs average pressure

## VNS28: Plastic Flow in a Punch

---

Source:	Reference 15 (Problem 9)
Elements:	Plane strain elements
Material:	Plasticity with Mohr-Coulomb criterion
Attribute:	Prescribed displacement
Keywords:	Material nonlinearity, elastoplastic analysis

---

A rigid rectangular punch is imposed into an elastic-perfectly-plastic Mohr-Coulomb soil material.

Material data:

Young's modulus	$E = 2.5 \times 10^6 \text{ Pa}$
Poisson's Ratio	$\nu = 0.25$
Cohesion	$c = 1.0 \times 10^4 \text{ Pa}$
Friction Angle	$\phi = 0^\circ$

Load data:

The punch is modelled with enforced nodal restraints. The nodes representing the punch are progressively pressed into the soil. It is assumed that there is no slipping between the footing and the soil, and the horizontal displacement of the nodes representing the punch is prevented.

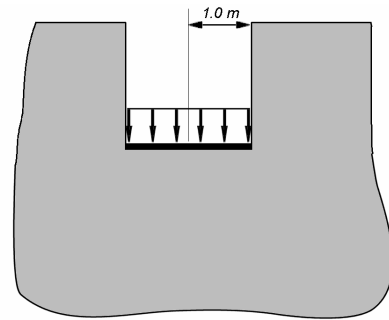


Figure VNS28-1: A punch problem

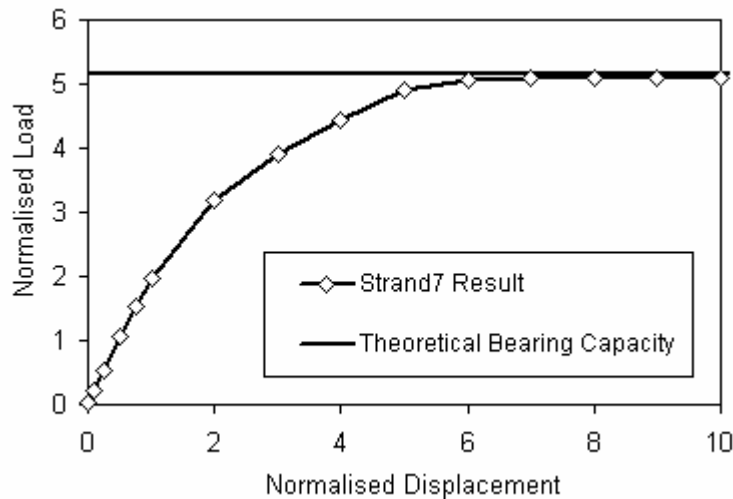


Figure VNS28-2: Displacement vs average pressure

The Straus7 mesh uses 500 Quad8 plane strain plate elements to model half of the structure. The results are presented via a graph showing the vertical displacement of the punch as a function of applied pressure. Similarly to VNS27, the applied pressure is calculated by summing the vertical node reactions at the nodes with enforced restraints and dividing the force by the area underneath the punch. In this case, the contact area is 0.95. The theoretical bearing capacity  $q$ , is given by  $q = c(2+\pi)$  where  $c$  is the cohesion. In this case the theoretical value is 51.4 *kPa*.

# VNS29: Large Displacement and Large Strain Analysis of a Rubber Sheet

Source:	Reference 16
Elements:	Plane stress and 3D membrane elements
Material:	Rubber (Mooney-Rivlin model)
Attribute:	Plate edge stress
Keywords:	Material nonlinearity, large displacement, finite strain

A rubber sheet is clamped at one edge and under uniform tension at the opposite edge, as show in the figure. The deformation of the sheet under different load levels is determined.

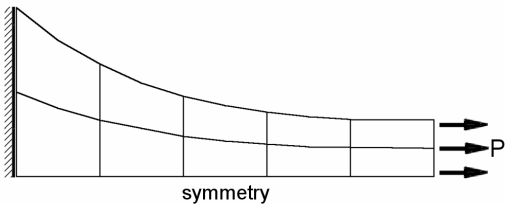


Figure VNS29: Rubber sheet under tension

Material data:  
Rubber model    Mooney-Rivlin  
                           $C_1 = 21.0605 \text{ lb/in}^2$   
                           $C_2 = 15.743 \text{ lb/in}^2$   
Thickness         $t = 0.123 \text{ in}$

Load data:  
Distributed stress at the free edge. The maximum resultant force is 41.80 lbs.

Increment	Load P	NONSAP 11 × 3 QUAD4 Plane stress	Straus7			
			10 × 4 QUAD4		5 × 2 QUAD8	
			Plane stress	3D Membrane	Plane stress	3D Membrane
1	10.45	1.25	1.25	1.25	1.27	1.27
2	20.90	3.18	3.01	2.99	3.04	3.04
3	31.35	5.61	5.48	5.44	5.55	5.55
4	41.80	8.39	8.83	8.72	8.91	8.91

Table 29: Summary of displacement at the right end (in)

## VNS30: Stretching of a Square Membrane

Source: Reference 17  
 Elements: Plane stress and 3D membrane elements  
 Material: Rubber (Mooney-Rivlin model)  
 Attribute: Plate edge stress, prescribed displacement  
 Keywords: Material nonlinearity, large displacement, finite strain

A square membrane with edge length of 8 inches is stretched by 8 inches in one direction. The total edge force to be applied is calculated.

Material data:

Rubber model: Mooney-Rivlin with  
 $C_1 = 4.0 \text{ psi}$  and  $C_2 = 1.5 \text{ psi}$   
 Thickness 0.25 in

Load data:

Distributed stress at the free edge. The membrane is stretched by 8 in.

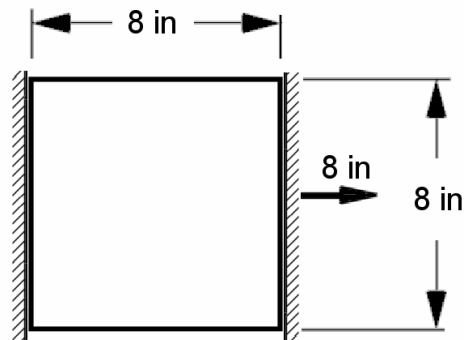


Figure VNS30-1: Stretching of a square membrane

With a 32 by 32 QUAD9 mesh, a converged solution of 34.72 lbs has been found for the edge force.

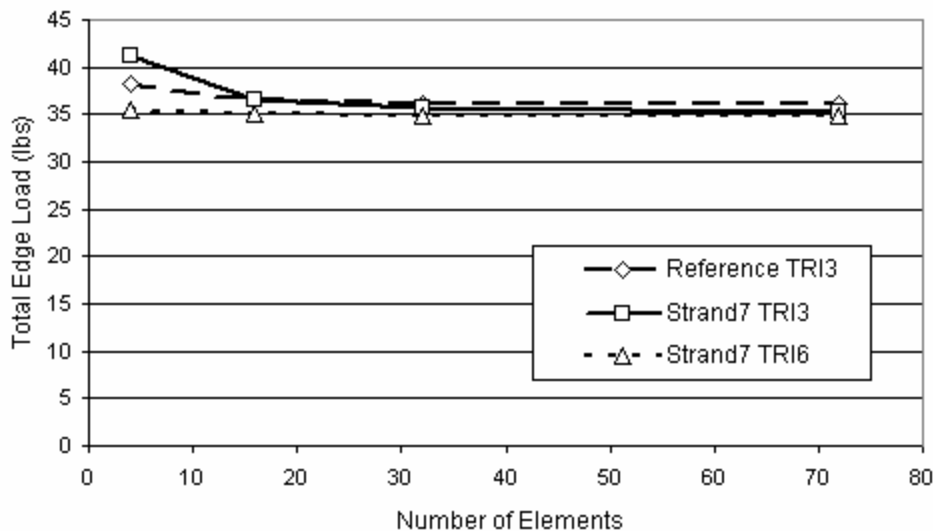
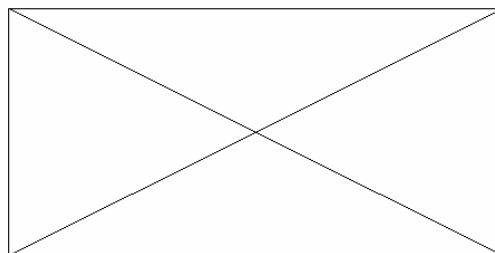
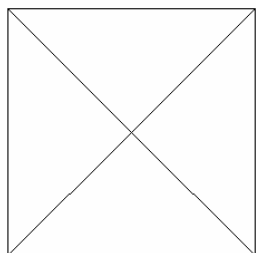
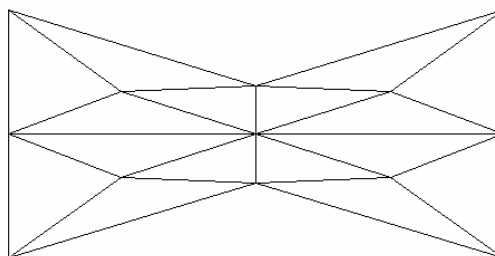
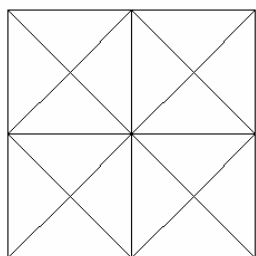


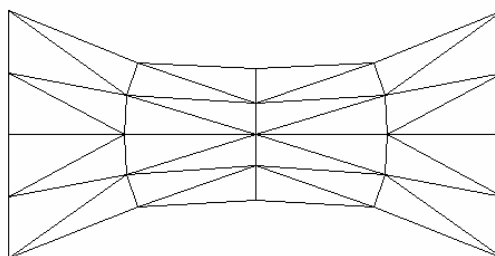
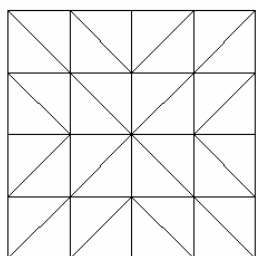
Figure VNS30- 2: Total edge force results versus number of elements used



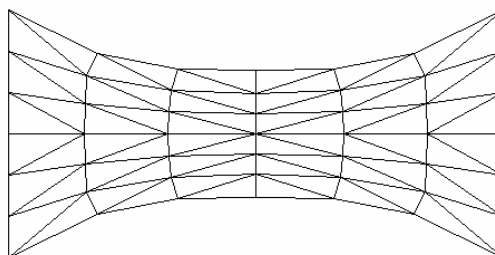
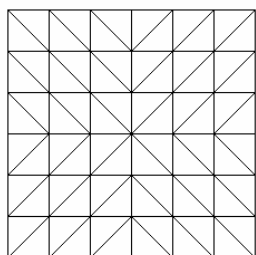
*4 element representation*



*16 element representation*



*32 element representation*



*72 element representation*

*Figure VNS30- 3: Stretched square membrane*



Number of elements	Reference TRI3	Straus7 TRI3	Straus7 TRI6
4	38.25	41.250	35.389
16	36.58	36.568	34.983
32	36.10	35.713	34.811
72	36.03	35.227	34.754

*Table VNS30: Summary of results for the total edge force*

## VNS31: Shallow Spherical Shell Under Normal Pressure

Source: Reference 18  
 Elements: 3D membrane elements  
 Material: Rubber (Ogden model)  
 Attribute: Plate normal pressure, sector symmetry link  
 Keywords: Material nonlinearity, large displacement, finite strain

A flat circular membrane of radius 10 and thickness 0.1 is subjected to uniform normal pressure such that it is inflated into a spherical shape. The deflection of the centre point is calculated for different pressure values.

Material data:

Ogden model:  $\mu_1 = 6.29947$   
 $\alpha_1 = 1.3$   
 $\mu_2 = 0.01267$   
 $\alpha_2 = 5.0$   
 $\mu_3 = -0.10013$   
 $\alpha_3 = -2.0$

Geometry data:

Radius  $R = 10$   
 Plate thickness  $t = 0.1$

Load data:

Uniform normal pressure on the plate surface

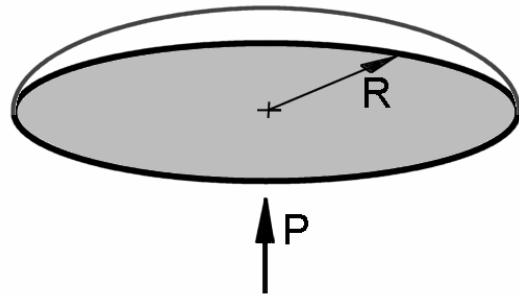


Figure VNS31-1: Shallow spherical shell under pressure

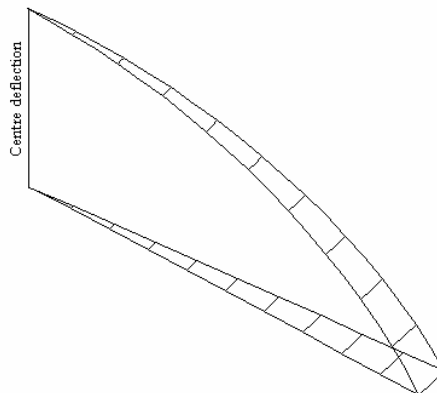


Figure 31-2: Initial geometry and deformed geometry when pressure is 0.04

A 5° sector is modelled with 3D membrane elements. Two meshes are used, one with nine QUAD8 and one TRI6 elements as shown in Figure VNS31-2, and the other with 19 QUAD4 and one TRI3 elements. The initial geometry is shown in Figure VNS31-2 together with the deformed geometry when the applied pressure is 0.04.

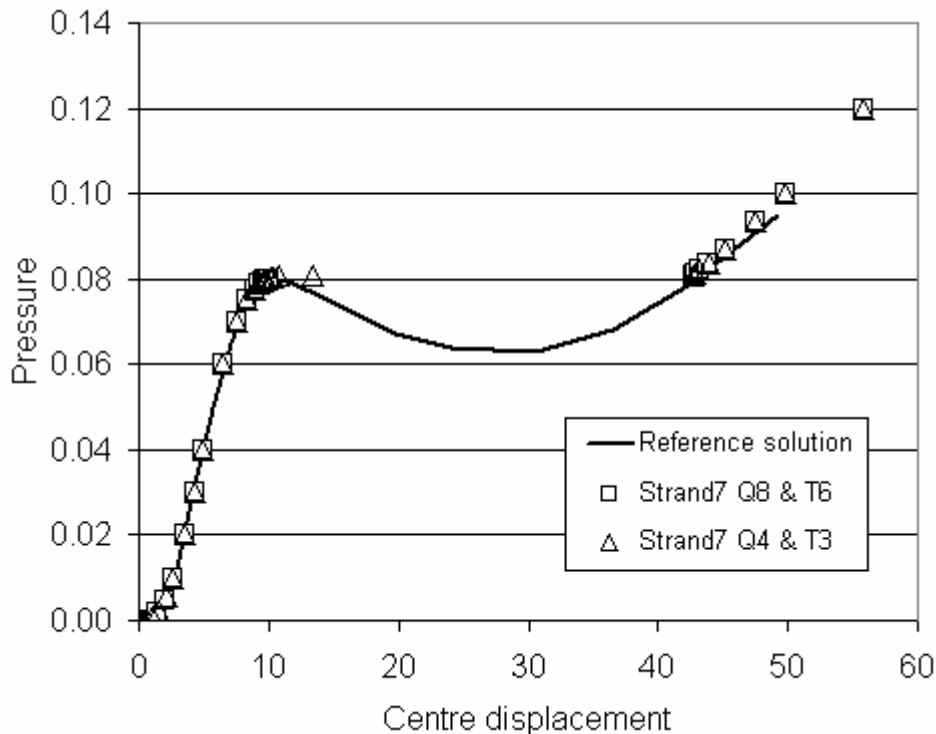


Figure VNS31-3: Centre deflection versus pressure

## VNS32: Equiaxial Tension of a Square Membrane

Source: Reference 18  
 Elements: Plane stress and 3D membrane elements  
 Material: Rubber (Ogden model)  
 Attribute: Prescribed nodal displacement  
 Keywords: Material nonlinearity, large displacement, finite strain

A square membrane is stretched in both directions by the same amount. The true stress in the membrane is calculated.

Material data:

Ogden model  $\mu_1 = 6.29947$   
 $\alpha_1 = 1.3$   
 $\mu_2 = 0.01267$   
 $\alpha_2 = 5.0$   
 $\mu_3 = -0.10013$   
 $\alpha_3 = -2.0$

Geometry data:

Edge length  $L = 1.0$   
 Plate thickness  $t = 0.1$

Load data:

Enforced displacement as shown.

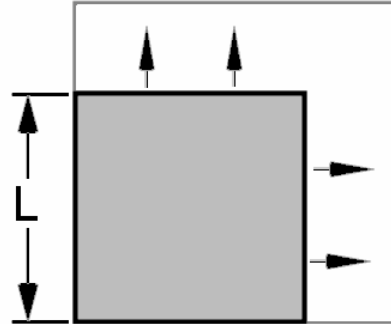


Figure VNS32-1: Equiaxial tension of a square membrane

Stretch	True stress	Stretch	True stress	Stretch	True stress
1.0	0.00000	3.4	49.78633	5.8	258.31422
1.2	4.23060	3.6	57.55002	6.0	292.92736
1.4	7.53079	3.8	66.44395	6.2	331.48905
1.6	10.49917	4.0	76.62257	6.4	374.34238
1.8	13.41879	4.2	88.25314	6.6	421.84938
2.0	16.45456	4.4	101.51636	6.8	474.39152
2.2	19.72404	4.6	116.60688	7.0	532.37016
2.4	23.32655	4.8	133.73386	7.2	596.20711
2.6	27.35671	5.0	153.12145	7.4	666.34503
2.8	31.91114	5.2	175.00930	7.6	743.24799
3.0	37.09229	5.4	199.65310	7.8	827.40190
3.2	43.01066	5.6	227.32502	8.0	919.31502

Table VNS32: Analytical solution for true stress

Let  $\lambda$  be the stretch in the two directions. The analytical solution for the true stress (Cauchy stress) is

$$\sigma = \sum_{r=1}^3 \mu_r [\lambda^{\alpha_r} - \lambda^{-2\alpha_r}]$$

Two meshes have been considered: one with a single 8-node square element and the other with 5 distorted 8-node elements. Results for both meshes are very close to the analytical solution presented in Table VNS32.

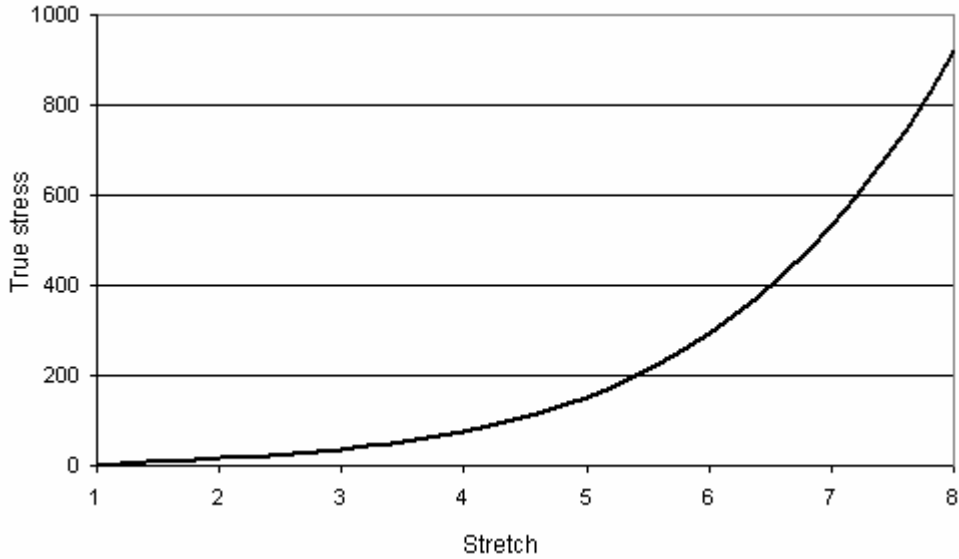


Figure VNS32-2: True stress vs stretch

## VNS33: Uniaxial Extension of a Rectangular Block

---

Source:	Reference 19
Elements:	3D solid elements
Material:	Rubber models (Neo-Hookean and Mooney-Rivlin)
Attribute:	Prescribed nodal displacement
Keywords:	Material nonlinearity, large displacement, large strain

---

A rectangular block is stretched in one direction. The true stress in the block is calculated for two rubber models.

Material data:

Neo-Hookean model:	$C = 5.5$
Mooney-Rivlin model:	$C_1 = 4.0, \quad C_2 = 1.5$
Bulk modulus:	$K_b = 5 \times 10^5$

Geometry data:

Length	8.0
Width	8.0
Thickness	1.0

Boundary support conditions:

On plane $YOZ$	$DX = 0$
On plane $XOZ$	$DY = 0$
On plane $XOY$	$DZ = 0$

Load data:

Enforced displacement as shown to enforce uniaxial tension.

Let  $\lambda$  be the stretch in the length direction. The analytical solution for the true stress (Cauchy stress) in the direction of stretching is

$$\sigma = 2 \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \left( C_1 + \frac{C_2}{\lambda} \right)$$

and stresses in the other two directions are zero.

A 20-node brick element is used to model the rectangular block. The element is in a uniform stress state, with the only non-zero normal stress in X direction. The stress values at different stretch levels are presented in Figure VNS33-2.

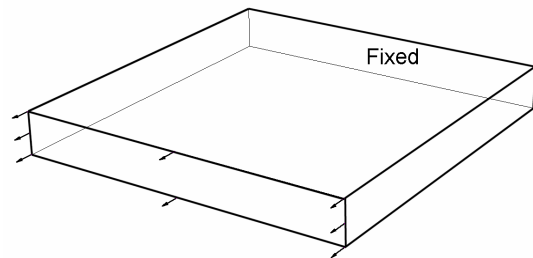


Figure VNS33-1: Uniaxial tension of a rectangular block

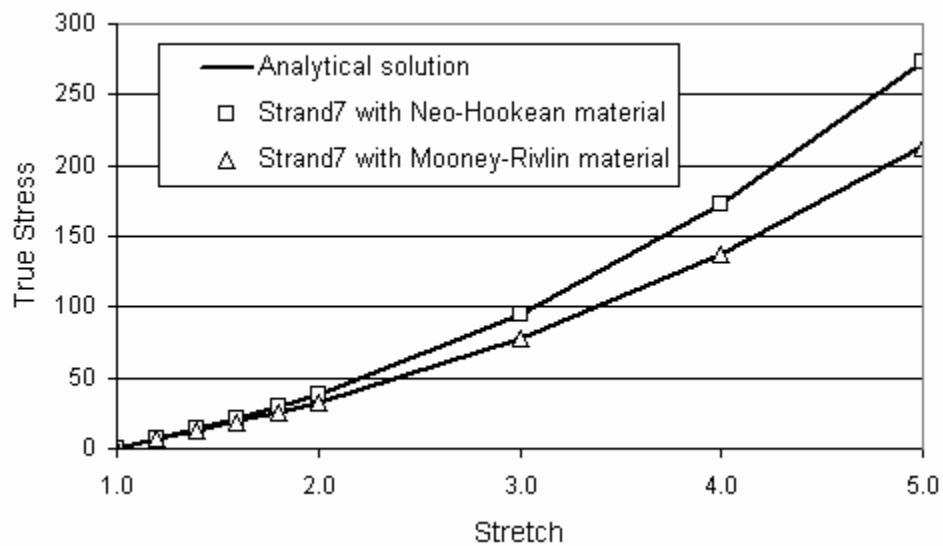


Figure VNS33-2: Results for true stress in the direction of stretching

## VNS34: Rubber Cylinder Under Internal Pressure

---

Source:	Reference 20
Elements:	Axisymmetric plate elements
Material:	Rubber (Mooney-Rivlin model)
Attribute:	Plate edge stress
Keywords:	Material nonlinearity, large displacement, finite strain

---

A thick rubber cylinder is under internal pressure. The displacement at the inner surface is determined for different pressure values.

Material data:

$$\begin{aligned} \text{Mooney-Rivlin model} \quad C_1 &= 80.0 \text{ psi} \\ C_2 &= 20 \text{ psi} \\ \text{Bulk modulus} \quad K_b &= 10^4 \text{ psi or } 10^6 \text{ psi} \end{aligned}$$

Geometry data:

$$\begin{aligned} \text{Inner radius} \quad r_i &= 7.0 \text{ in} \\ \text{Outer radius} \quad r_o &= 18\frac{5}{8} \text{ in} \\ \text{Height} \quad h &= 5 \text{ in} \end{aligned}$$

Load data:

Uniform pressure on the inner surface of the cylinder

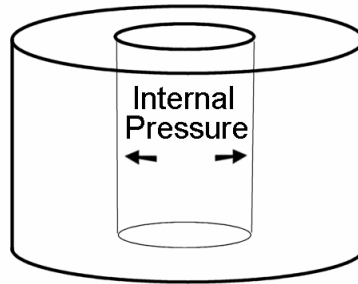


Figure VNS34-1: Rubber cylinder under internal pressure

Let  $r$  be the value of the current inner radius. The analytical solution for the pressure is

$$p = (C_1 + C_2) \left[ \frac{(r^2 - r_i^2)(r_o^2 - r_i^2)}{r^2(r^2 + r_o^2 - r_i^2)} + \ln \left( \frac{r^2}{r^2 + r_o^2 - r_i^2} \right) + 2 \ln \left( \frac{r_o}{r_i} \right) \right]$$

Ten QUAD9 axisymmetric plate elements are used to model the cylinder and ten equal load steps are used for the maximum internal pressure of 150 psi.



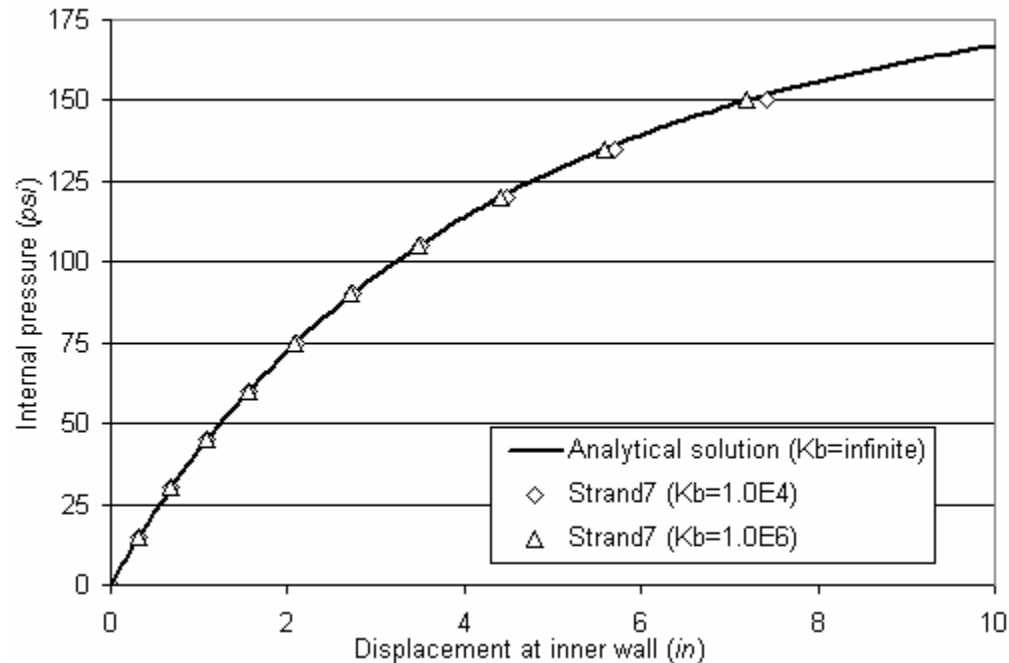


Figure VNS34-2: Internal pressure vs displacement at the inner wall

## VNS35: Rubber Cylinder Pressed Between Two Plates

Source:	Reference 20
Elements:	Plane strain, 3D solid and point contact elements
Material:	Rubber (Mooney-Rivlin model)
Attribute:	Prescribed nodal displacement
Keywords:	Material nonlinearity, large displacement, finite strain

A rubber cylinder is pressed between two frictionless plates. The relationship between the compressed distance and the force required is determined.

Material data:

Mooney-Rivlin model	$C_1 = 0.293 \times 10^6 \text{ Pa}$
	$C_2 = 0.177 \times 10^6 \text{ Pa}$
Bulk modulus	$K_b = 1410.0 \times 10^6 \text{ Pa}$

Geometry data:

Radius	$r = 0.2 \text{ m}$
Thickness	$t = 1.0 \text{ m}$

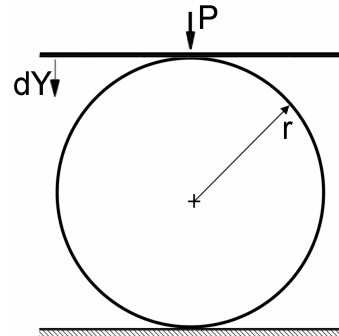


Figure VNS35-1: Compressed rubber cylinder

48 QUAD8 plate elements are used to model a quarter of the cylinder section. Zero-gap elements are used to simulate the contact between the cylinder and plate and prescribed nodal displacements are applied at the symmetry plane. The results for the force required to compress the cylinder are presented in Figure VNS35-2, while some of the deformed shapes are shown in Figure VNS35-3.

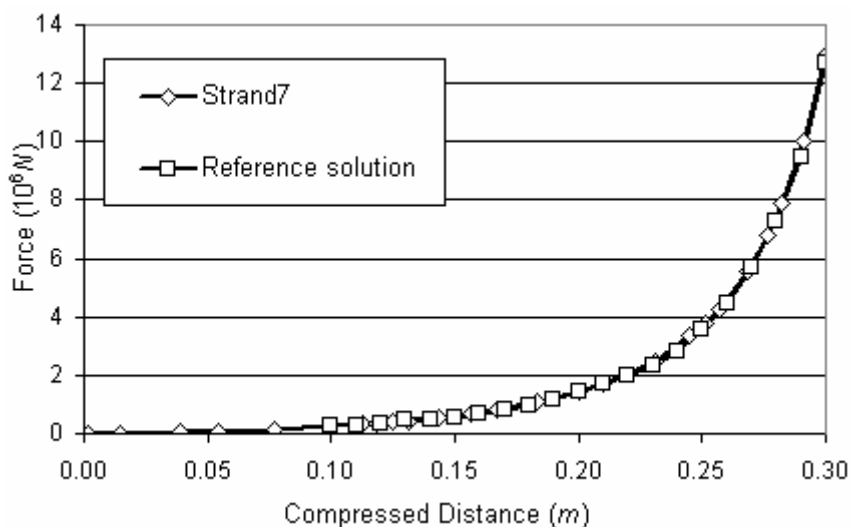
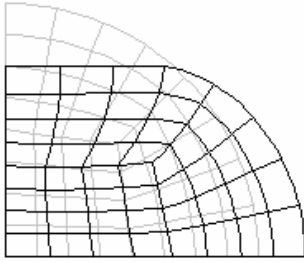
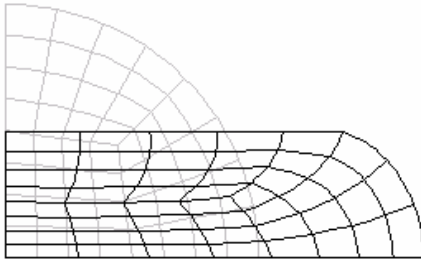


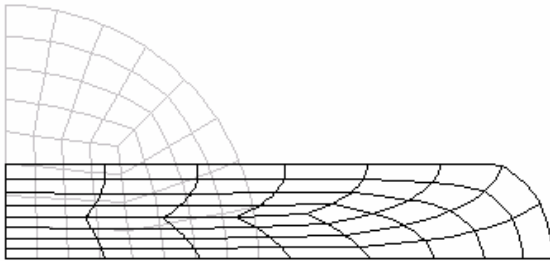
Figure VNS35-2: Force required to compress the cylinder



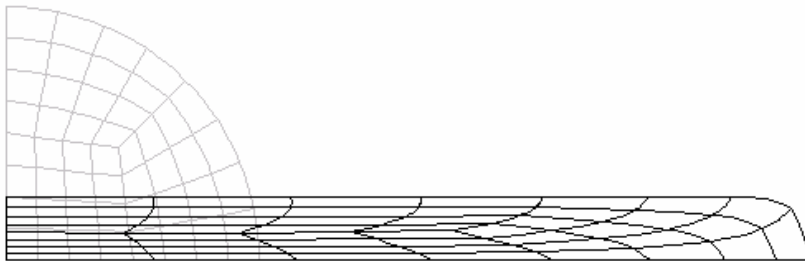
*Compressed distance = 0.1m*



*Compressed distance = 0.2m*



*Compressed distance = 0.25m*



*Compressed distance = 0.3m*

In a separate brick model, 48 HEXA20 brick elements are used to model the cylinder. The results obtained are similar to those of the plate model.

# VNS36: Footing on Clay

Source: Reference 21  
 Elements: Axisymmetric element  
 Material: Soil (Duncan-Chang model)  
 Attribute: Plate edge pressure  
 Keywords: Material nonlinearity

Settlements of an 8-ft diameter circular footing on the surface of a layer of saturated clay are to be calculated. Four node axisymmetric plate elements are used. The problem dimensions and mesh used are presented in Figure VNS36-1.

Material data:

Clay

Cohesion  $c = 0.5 \text{ t / ft}^2$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.48$   
 Friction angle  $\phi = 0$   
 Modulus number  $K = 47$   
 Modulus exponent  $n = 0$   
 Failure ratio  $R_f = 0.9$   
 Unit weight  $\gamma = 0.049896 \text{ t / ft}^3$   
 Coefficient of earth pressure  $K_0 = 1.0$   
 Atmospheric pressure  $p_a = 0.9602 \text{ t / ft}^2$   
 After-failure modulus  $E_{\min} = 1.0 \times 10^{-5} \text{ t / ft}^2$

Footing

Modulus  $E = 1000 \text{ t / ft}^2$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.0$

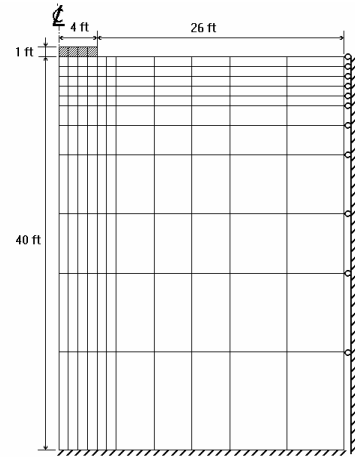


Figure VNS36-1: Circular Footing on Clay

Two sets of results are obtained with different load increment sizes. The settlement results at different load levels are presented in the following graph and tables. It can be seen that, with a smaller load increment, Straus7 gives a much better prediction of the failure load, which agrees very well with the analytical solution. On the other hand, when larger load increments are used, the predicted failure load is higher.

Pressure	Settlement	Pressure	Settlement	Pressure	Settlement
0.25	-0.0193	2.00	-0.325	3.00	-2.46
0.50	-0.0418	2.25	-0.445	3.05	-3.32
0.75	-0.0678	2.50	-0.634	3.10	-4.80
1.00	-0.0988	2.60	-0.776	3.15	-8.16
1.25	-0.136	2.70	-0.970	3.20	-24.2
1.50	-0.183	2.80	-1.25	3.25	-872
1.75	-0.244	2.90	-1.68	3.30	-1000

Table VNS36-1: Settlements at different levels of pressure (large load steps)

Pressure	Settlement	Pressure	Settlement	Pressure	Settlement
0.10	-0.00771	1.60	-0.224	2.86	-1.74
0.20	-0.0159	1.70	-0.252	2.88	-1.88
0.30	-0.0248	1.80	-0.284	2.90	-2.03
0.40	-0.0342	1.90	-0.321	2.92	-2.21
0.50	-0.0441	2.00	-0.364	2.94	-2.41
0.60	-0.0548	2.10	-0.414	2.96	-2.65
0.70	-0.0661	2.20	-0.473	2.98	-2.93
0.80	-0.0782	2.30	-0.545	3.00	-3.26
0.90	-0.0914	2.40	-0.635	3.02	-3.67
1.00	-0.106	2.50	-0.749	3.04	-4.19
1.10	-0.121	2.60	-0.899	3.06	-4.85
1.20	-0.138	2.70	-1.11	3.08	-5.75
1.30	-0.156	2.80	-1.41	3.10	-7.04
1.40	-0.177	2.82	-1.51	3.11	-8.05
1.50	-0.199	2.84	-1.62	3.12	-9.36

Table VNS36-2: Settlements at different levels of pressure (small load steps)

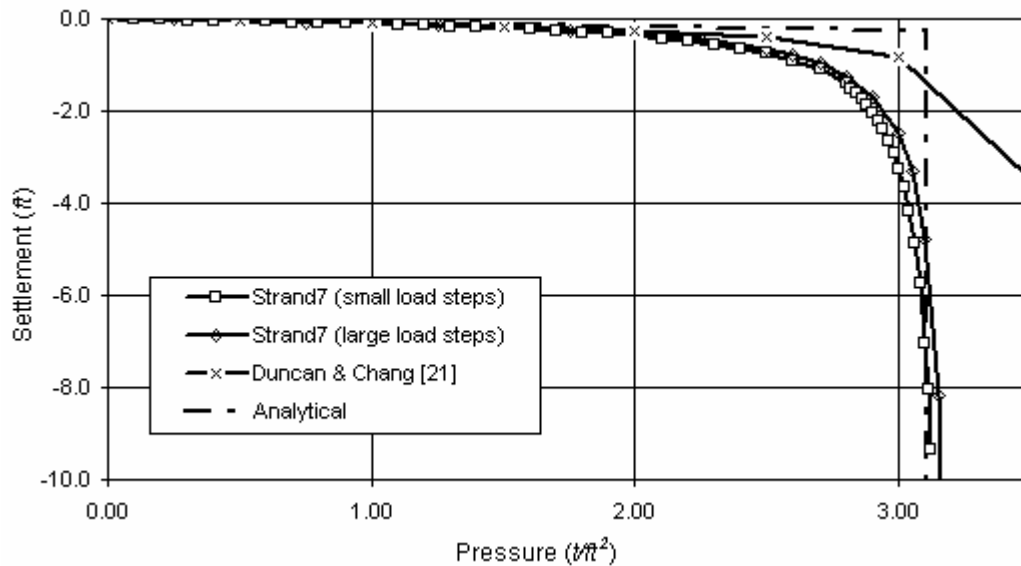


Figure VNS36-2: Settlement vs pressure curves

# VNS37: Footing in Sand

Source: Reference 21  
 Elements: Plane strain element  
 Material: Soil (Duncan-Chang model)  
 Attribute: Plate edge pressure  
 Keywords: Material nonlinearity, footing

A footing of 2.44 by 12.44 *in* is installed in Chatahoochee River sand at a depth of 20 *in*. The analysis is conducted with the plane strain model shown in Figure VNS37-1.

Material data:

Sand

Cohesion  $c = 0.0 \text{ lb/in}^2$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.35$   
 Friction angle  $\phi = 35.5$   
 Modulus number  $K = 300$   
 Modulus exponent  $n = 0.55$   
 Failure ratio  $R_f = 0.83$   
 Unit weight  $\gamma = 0.052662 \text{ lb/in}^3$   
 Coefficient of earth pressure  $K_0 = 1.0$   
 Atmospheric pressure  $p_a = 14.7 \text{ lb/in}^2$   
 After-failure modulus  $E_{\min} = 10.0 \text{ lb/in}^2$

Footing

Modulus  $E = 2.0 \times 10^8 \text{ lb/in}^2$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.0$

Average Pressure ( <i>lb/in</i> <sup>2</sup> )	Settlement ( <i>in</i> )
2.5	0.00515
5.0	0.0139
7.5	0.0289
10.0	0.0544
12.5	0.0927
15.0	0.144
17.5	0.207
20.0	0.280
22.5	0.363
25.0	0.453

Table VNS37: Settlement results

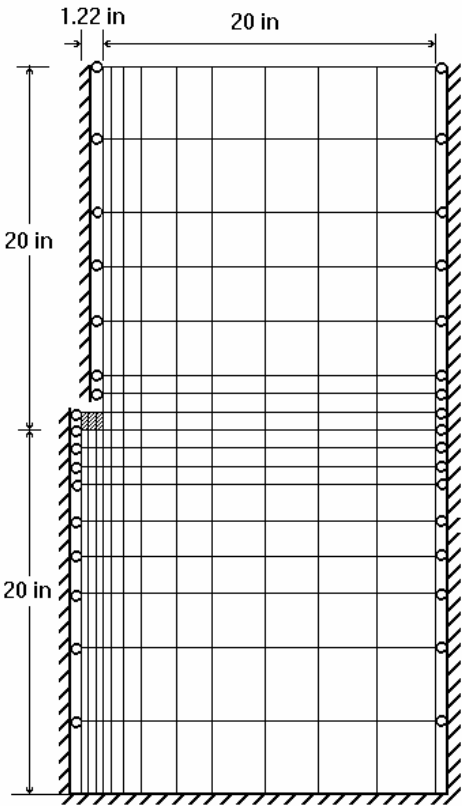


Figure VNS37-1: Footing in sand

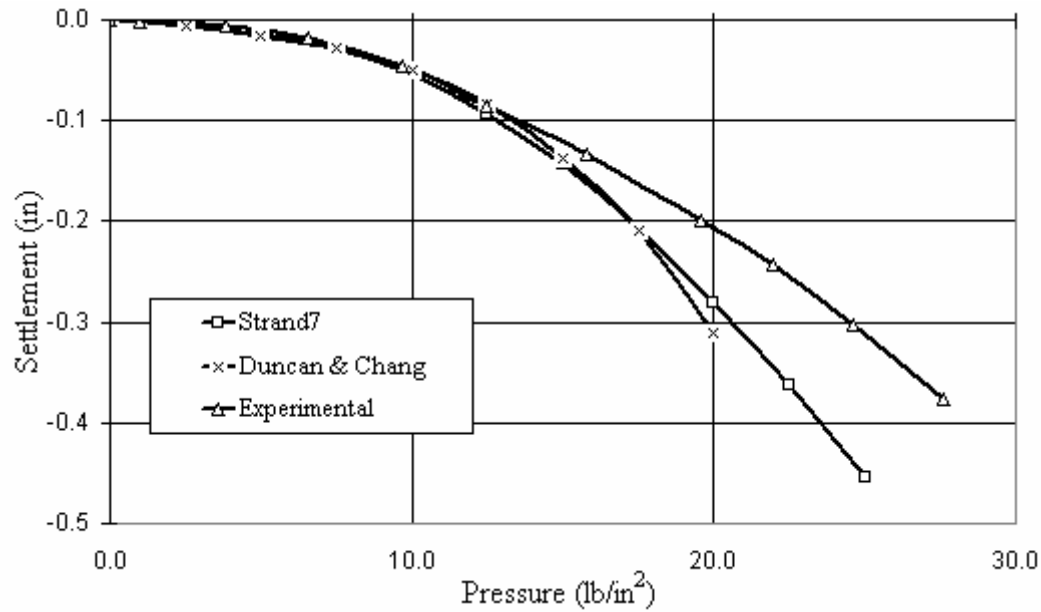


Figure VNS37-2: Settlement vs load curves

# VNS38: Footing on Sand

---

Source:	Reference 22
Elements:	Axisymmetric element
Material:	Soil (Duncan-Chang model)
Keywords:	Material nonlinearity

---

A footing on the surface of sand is analysed. A mesh consisting of 4-node axisymmetric elements, as shown in the figure is used. The modified Duncan-Chang model is used and the values of the parameters are:

Material data:

Sand

Cohesion	$c = 0.0 \text{ kN} / \text{m}^2$
Friction angle	$\phi = 40.2$
Friction angle change	$\Delta\phi = 0.5$
Modulus number	$K = 672.0$
Modulus exponent	$n = 0.57$
Bulk modulus number	$K_b = 817.0$
Bulk modulus exponent	$m = 0.35$
Failure ratio	$R_f = 0.88$
Unit weight	$\gamma = 17.16 \text{ kN} / \text{m}^3$
Coefficient of earth pressure	$K_0 = 1.0$
Atmospheric pressure	$p_a = 101.3 \text{ kN} / \text{m}^2$
After-failure modulus	$E_{\min} = 1.0 \times 10^{-4} \text{ kN} / \text{m}^2$

Footing

Modulus	$E = 2.0 \times 10^{10} \text{ Pa}$
Poisson's ratio	$\nu = 0.0$

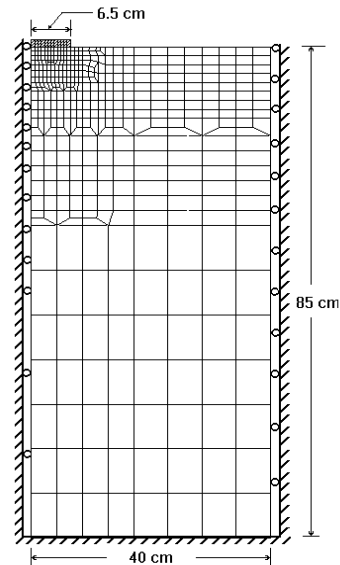


Figure VNS38-1: Footing on sand

The settlement results are presented in the graph below. Comparing the Straus7 results with the other two solutions, we can find that the two finite element solutions are close when the average pressure is below the failure load. As the material model in Straus7 is valid for the before-failure behaviour of soils, the solution does not show any abrupt change in footing settlement near the failure load. This example illustrates the limitations of the material model used in Straus7.



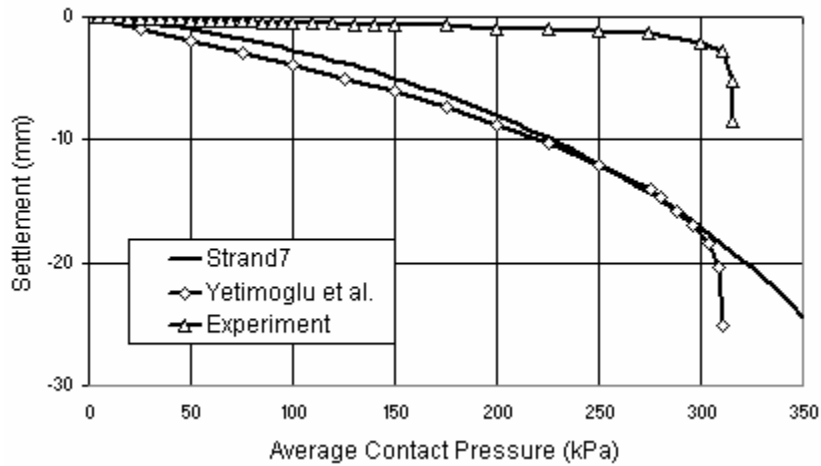


Figure VNS38-2: Settlement vs load curves

Pressure	Settlement	Pressure	Settlement	Pressure	Settlement
5	-0.0707	125	-3.7718	245	-11.580
10	-0.1487	130	-4.0036	250	-12.032
15	-0.2303	135	-4.2412	255	-12.480
20	-0.3233	140	-4.4881	260	-12.938
25	-0.4238	145	-4.7412	265	-13.412
30	-0.5311	150	-5.0033	270	-13.912
35	-0.6451	155	-5.2713	275	-14.425
40	-0.7668	160	-5.5470	280	-14.963
45	-0.8975	165	-5.8294	285	-15.505
50	-1.0340	170	-6.1187	290	-16.057
55	-1.1765	175	-6.4149	295	-16.594
60	-1.3256	180	-6.7201	300	-17.137
65	-1.4788	185	-7.0329	305	-17.688
70	-1.6402	190	-7.3551	310	-18.241
75	-1.8068	195	-7.6858	315	-18.793
80	-1.9781	200	-8.0273	320	-19.353
85	-2.1550	205	-8.3777	325	-19.952
90	-2.3369	210	-8.7396	330	-20.577
95	-2.5239	215	-9.1093	335	-21.224
100	-2.7169	220	-9.4919	340	-21.893
105	-2.9149	225	-9.8834	345	-22.610
110	-3.1198	230	-10.290	350	-23.366
115	-3.3302	235	-10.706		
120	-3.5482	240	-11.140		

Table VNS38: Settlement result summary

## References

1. NAFEMS, *Non-Linear Benchmarks* (Report No. NNB), Glasgow, UK, 1989.
2. A. A. Becker, *Background to Finite Element Analysis of Geometrical Non-linearity Benchmarks*, NAFEMS, Glasgow, UK.
3. K. Mattiasson, Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pp145-152, 1980.
4. A. A. Becker, *Background to Material Non-Linear Benchmarks* (Report R0049), NAFEMS, Glasgow, UK.
5. D. Linkens, *Selected Benchmarks for Material Non-Linearity*, NAFEMS, Glasgow, U.K., 1993.
6. E. Hinton and M. H. Ezatt, *Fundamental Tests for Two and Three Dimensional Small Strain, Elastoplastic Finite Element Analysis*, NAFEMS, Glasgow, U.K. April 1987.
7. NAFEMS, *Nonlinear Benchmarks*, Glasgow, U.K., 1989.
8. S. L. Chan, Large deflection kinematic formulations for three-dimensional framed structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **95** 17-36, (1992).
9. *ANSYS Verification Manual*, Swanson Analysis Systems, Inc. 1993.
10. *MSC/NASTRAN Demonstration Problem Manual*, The MacNeal-Schwendler Corporation, L.A., June 1983.
11. *MSC NASTRAN Handbook for Non-Linear Analysis*, The MacNeal-Schwendler Corporation, L.A., August 1991.
12. K. S. Surana, Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **19**, 581-615 (1983).
13. C. S. Gray et al. *Steel Designers' Manual* (2<sup>nd</sup> edition), Crosby Lockwood and Son Ltd, London, 1962.
14. *LUSAS Examples Manual*, FEA Ltd., September 1987.
15. *FLAC Verification Problems*, Itasca Consulting Group Inc., 1999.
16. K.-J. Bathe, E. L. Wilson and R. H. Iding, *NONSAP – A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Nonlinear Structures*, Report No. SESM 74-3, Department of Civil Engineering, University of California, Berkely, January 1974.
17. J. T. Oden and T. Sato, Finite strains and displacements of elastic membranes by the finite element method, *International Journal for Solids and Structures*, Vol.3, 471-488 (1967).

18. F. Gruttmann and R. L. Taylor, Theory and finite element formulation of rubberlike membrane shells using principle stretches, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35, 1111-1126 (1992).
19. Y. Basar and Y. Ding, Finite-element analysis of hyperelastic thin shells with large strains, *Computational Mechanics*, Vol. 18, 200-214 (1996).
20. C.H. Liu, G. Hofstetter and H. A. Mang, 3D finite element analysis of rubber-like materials at finite strains, *Engineering Computations*, Vol. 11, 111-128 (1994).
21. J.M. Duncan and C.-Y. Chang, Nonlinear Analysis of Stress and Strain in Soils, *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE. Vol. 96, No. SM5, 1629-1653 (1970).
22. T. Yetimoglu, J.T.H. Wu and A. Saglammer, Bearing Capacity of Rectangular Footings on Geogrid-Reinforced Sand, *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE. Vol. 120, No. 12, 2083-2099 (1994).

## CHAPTER 4

# Natural Frequency



## VNF1: Pin-Ended Cross - In-Plane Vibration

Source: Reference 1 (Test 1)  
 Elements: Beam element  
 Attribute: Beam rotational end-release  
 Keywords: Repeated eigenvalues, consistent mass matrix, lumped mass matrix

The natural frequencies of the 2D frame shown are determined. Geometry data is shown in the figure.

Material data:

Young's modulus  $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$   
 Mass density  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$

As the structure has repeated and close frequencies, this test is used to check the capability of the eigenvalue solver to handle such situations.

The test is also used to

- (1) Compare the effect of different element mass matrix calculations: lumped and consistent mass matrices are used separately in two runs;
- (2) Check the rotational end-release for the pinned support condition. Two models are used: supports are treated as pinned in one, and as fully fixed in the other. In the one with fully fixed supports, rotational end-release is applied to free the rotational displacement of the beam at the support.

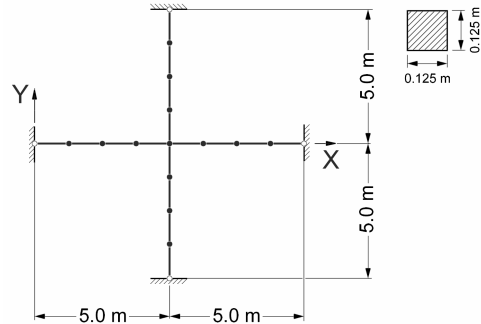


Figure VNF1: Problem sketch

Mode	Target	Pinned support		Beam rotational end-release	
		Lumped mass	Consistent mass	Lumped mass	Consistent mass
1	11.336	11.333 (<0.1%)	11.336 (0.0%)	11.333 (<0.1%)	11.336 (0.0%)
2 & 3	17.709	17.662 (-0.3%)	17.687 (-0.1%)	17.662 (-0.3%)	17.688 (-0.1%)
4	17.709	17.690 (-0.1%)	17.715 (<0.1%)	17.690 (-0.1%)	17.716 (<0.1%)
5	45.345	45.016 (-0.7%)	45.477 (0.3%)	45.016 (-0.7%)	45.514 (0.4%)
6 & 7	57.390	56.059 (-2.3%)	57.364 (<0.1%)	56.059 (-2.3%)	57.450 (0.1%)
8	57.390	56.344 (-1.8%)	57.683 (0.5%)	56.344 (-1.8%)	57.771 (0.7%)

Table VNF1: Summary of natural frequencies (Hz)

All the results presented above agree well with the target values, and for this particular problem, the way the element mass matrix is calculated has little effect on the results.

The algorithm for handling beam end-release is based on static condensation, which is exact only for linear static analysis. For the current problem, the error introduced is negligible.

## VNF2: Pin-Ended Double Cross - In-Plane Vibration

Source: Reference 1 (Test 2)  
 Elements: Beam element  
 Attribute: Beam rotational end-release  
 Keywords: Repeated eigenvalues, consistent mass matrix, lumped mass matrix

This test is similar to VNF1. The natural frequencies of the 2D frame shown are determined. Geometry data is shown in the figure.

Material data:

Young's modulus  $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$

Mass density  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$

As the structure has repeated and close frequencies, this test is used to check the capability of the eigenvalue solver to handle such situations.

The test is also used to

- (1) Compare the effect of different element mass matrix calculations: lumped and consistent mass matrices are used separately in two runs;
- (2) Check the rotational end-release for the pinned support condition.

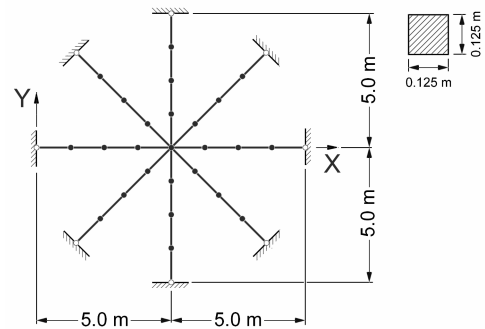


Figure VNF2: Problem sketch

Mode	Target	Pinned support		Beam rotational end-release	
		Lumped mass	Consistent mass	Lumped mass	Consistent mass
1	11.336	11.333 (<0.1%)	11.336 (0%)	11.333 (<0.1%)	11.336 (0.0%)
2 & 3	17.709	17.662 (-0.3%)	17.687 (-0.1%)	17.662 (-0.3%)	17.688 (-0.1%)
4 to 6	17.709	17.690 (-0.1%)	17.715 (<0.1%)	17.690 (-0.1%)	17.716 (<0.1%)
7 to 8	17.709	17.691 (-0.1%)	17.715 (<0.1%)	17.691 (-0.1%)	17.716 (<0.1%)
9	45.345	45.016 (-0.7%)	45.477 (0.3%)	45.016 (-0.7%)	45.514 (0.4%)
10 & 11	57.390	56.059 (-2.3%)	57.364 (<0.1%)	56.059 (-2.3%)	57.450 (0.1%)
12 to 14	57.390	56.344 (-1.8%)	57.683 (0.5%)	56.344 (-1.8%)	57.771 (0.7%)
15 to 16	57.390	56.344 (-1.8%)	57.684 (0.5%)	56.344 (-1.8%)	57.772 (0.7%)

Table VNF2: Summary of natural frequencies (Hz)

All the results presented above agree well with the target values, and for this particular problem, the way the element mass matrix is calculated has little effect on the results.

The algorithm for handling beam end-release is based on static condensation, which is exact only for linear static analysis. For the current problem, the error introduced is negligible.

## VNF3: Free Square Frame - In-Plane Vibration

Source: Reference 1 (Test 3)

Elements: Beam element

Keywords: Eigenvalue shift, repeated eigenvalues, consistent mass matrix, lumped mass matrix

The natural frequencies of a free square frame are determined. Geometry data is shown in the figure.

Material data:

Young's modulus  $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$

Mass density  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$

In addition to repeated frequencies, this frame also has three zero frequencies corresponding to the three rigid-body modes. This test therefore checks the capability of the eigenvalue solver to extract zero eigenvalues.

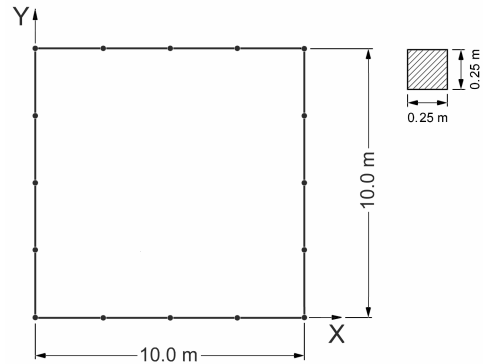


Figure VNF3: Problem sketch

Mode	Target (Hz)	Lumped	Consistent Mass
4	3.261	3.261 (0.0%)	3.261 (0%)
5	5.668	5.664 (-0.1%)	5.665 (-0.1%)
6 & 7	11.136	10.908 (-2.0%)	11.145 (0.1%)
8	12.849	12.780 (-0.5%)	12.833 (-0.1%)
9	24.570	23.601 (-3.9%)	24.664 (0.4%)
10 & 11	28.695	28.287 (-1.4%)	28.813 (0.4%)

Table VNF3: Summary of natural frequencies (Hz)

Three rigid-body modes are found and all the other frequency results and corresponding modes agree well with the target values.



# VNF4: Cantilever With Off Centre Point Masses

Source: Reference 1 (Test 4)  
 Elements: Beam element and rigid link  
 Attribute: Node translational mass  
 Keywords: Off-centre point mass, coupling between torsional and flexural behaviour

The natural frequencies of a cantilever beam with off-centre point masses are determined. Geometry and point mass data are shown in the figure.

Material data:

Young's modulus  $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$

Mass density  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$

Rigid links are used to connect the masses to the beam.  
 Due to the inclusion of point masses, there is coupling between torsional and flexural behaviour.

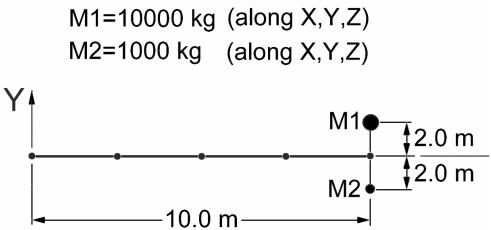


Figure VNF4: Problem sketch

Mode	Target	Lumped mass	Consistent mass
1	1.723	1.715 (-0.5%)	1.723 (0.0%)
2	1.727	1.719 (-0.5%)	1.727 (0.0%)
3	7.413	7.392 (-0.3%)	7.413 (0.0%)
4	9.972	9.978 (0.1%)	9.972 (0.0%)
5	18.155	17.759 (-2.2%)	18.160 (<0.1%)
6	26.957	27.058 (0.4%)	26.972 (<0.1%)

Table VNF4: Summary of natural frequencies (Hz)

## VNF5: Deep Simply Supported Beam

Source: Reference 1 (Test 5)  
 Elements: Beam element  
 Keywords: Transverse shear deformation, Timoshenko beam

The simply supported deep beam is analysed. To consider the transverse shear deformation, the Timoshenko beam element is used by setting the appropriate transverse shear areas for the beam. Geometry data are shown in the figure.

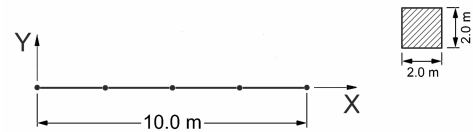


Figure VNF5: Problem sketch

Material data:

Young's modulus  $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$   
 Mass density  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$   
 Transverse shear area  $A_s = 5/6 A = 5/6 \cdot 4 = 3.333 \text{ (m}^2\text{)}$

Mode	Target	Lumped mass	Consist mass
1 & 2	42.649	43.111 (1.1%)	42.675 (0.1%)
3	71.512	70.926 (-0.8%)	71.512 (0.0%)
4	125.00	124.49 (-0.4%)	125.51 (0.4%)
5 & 6	148.31	149.39 (0.7%)	150.43 (1.4%)
7	221.62	205.84 (-7.1%)	221.62 (<0.1%)
8 & 9	284.55	269.57 (-5.3%)	300.10 (5.5%)

Table VNF5: Summary of natural frequencies (Hz)

# VNF6: Free Circular Ring

Source:	Reference 1 (Test 6)
Elements:	Beam element
Keywords:	Eigenvalue shift, repeated eigenvalues, consistent mass matrix, lumped mass matrix

The circular ring shown is analysed.

Material data:

Young's modulus  $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$   
 Mass density  $\rho = 8000 \text{ kg / m}^3$

As there is no restraint applied, the ring has 6 rigid-body modes. This test checks the capability of the eigenvalue solver to extract all the corresponding zero eigenvalues.

Mode	Target	Lumped	Consistent
7	51.849	51.542 (0.6%)	52.290 (0.9%)
8	51.849	51.648 (0.4%)	52.290 (0.9%)
9 & 10	53.382	54.258 (0.6%)	53.971 (1.1%)
11 & 12	148.77	147.32 (1.0%)	149.70 (0.6%)
13 & 14	150.99	153.56 (0.7%)	152.44 (1.0%)
15	286.98	282.67 (1.5%)	288.25 (0.4%)
16	286.98	282.73 (1.5%)	288.25 (0.4%)
17 & 18	289.51	293.97 (1.5%)	291.89 (0.8%)

Table VNF6: Summary of natural frequencies (Hz)

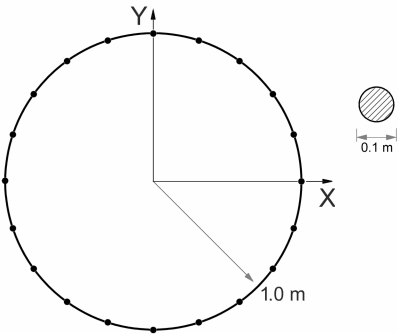


Figure VNF6: Problem sketch

## VNF7: Thin Square Cantilevered Plate - Symmetric Modes

Source: Reference 1 (Test 11a)  
 Elements: All plate/shell elements (bending behaviour)  
 Keywords: Symmetric modes, consistent mass matrix, lumped mass matrix

The square plate shown is fully fixed at the left end.

All the in-plane degrees of freedom are fixed, and as only the symmetric modes are required, the corresponding constraint  $\theta_x = 0$  is applied along line  $Y = 5 \text{ m}$ . Also, in-plane displacement components  $DX$  and  $DY$  are fixed in the global freedom setting.

Material data:

Young's modulus  $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$   
 Mass density  $\rho = 8000 \text{ kg / m}^3$

Mesh data:

High order elements:  $4 \times 2$  (as shown)  
 Low order elements:  $8 \times 4$

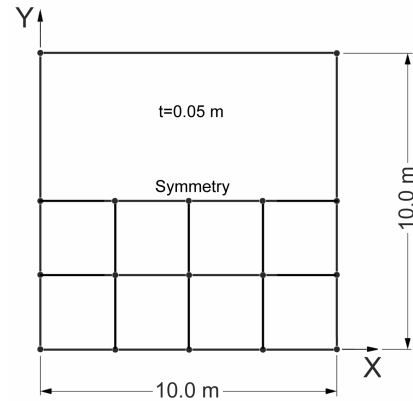


Figure VNF7: Problem sketch

Mode	Target	TRI3	QUAD4	TRI6	QUAD8	QUAD9
1	0.421	0.416 (-1.2%)	0.415 (-1.4%)	0.418 (-0.7%)	0.414 (-1.7%)	0.418 (-0.7%)
2	2.582	2.529 (-2.0%)	2.488 (-3.6%)	2.530 (-2.0%)	2.445 (-5.3%)	2.568 (-0.5%)
3	3.306	3.124 (-5.5%)	3.122 (-5.6%)	3.192 (-3.4%)	3.081 (-6.8%)	3.281 (-0.9%)
4	6.555	6.347 (-3.2%)	6.069 (-7.4%)	6.578 (0.4%)	6.023 (-8.1%)	6.542 (-0.2%)
5	7.381	7.251 (-1.8%)	7.087 (-4.0%)	7.238 (-1.9%)	6.943 (-5.9%)	7.498 (1.6%)
6	11.402	11.454 (0.5%)	10.551 (-7.5%)	12.274 (7.6%)	10.577 (-7.2%)	11.814 (3.6%)

Table VNF7-1: Summary of natural frequencies (Hz) – lumped mass matrix

Mode	Target	TRI3	QUAD4	TRI6	QUAD8	QUAD9
1	0.421	0.419 (-0.5%)	0.417 (-1.0%)	0.420 (-0.2%)	0.419 (-0.5%)	0.418 (-0.7%)
2	2.582	2.621 (1.5%)	2.602 (0.8%)	2.577 (0.3%)	2.570 (-0.5%)	2.572 (-0.4%)
3	3.306	3.362 (1.7%)	3.322 (0.5%)	3.315 (2.2%)	3.281 (-0.8%)	3.288 (-0.5%)
4	6.555	6.926 (5.7%)	6.661 (1.6%)	6.862 (4.7%)	6.571 (0.2%)	6.567 (0.2%)
5	7.381	8.049 (9.1%)	7.799 (5.7%)	7.589 (2.8%)	7.498 (1.6%)	7.579 (2.7%)
6	11.402	13.179 (16.0%)	12.270 (7.6%)	13.117 (15.0%)	12.151 (6.6%)	11.964 (4.9%)

Table VNF7-2: Summary of natural frequencies (Hz) – consistent mass matrix

## VNF8: Thin Square Cantilevered Plate - Anti-Symmetric Modes

Source: Reference 1 (Test 11b)

Elements: All plate/shell elements (bending behaviour)

Keywords: Anti-symmetric modes, consistent mass matrix, lumped mass matrix

This test is the same as VNF7, except that only the anti-symmetric modes are required. The restraint applied along the line  $Y = 5 \text{ m}$  is  $D_z = 0$ .

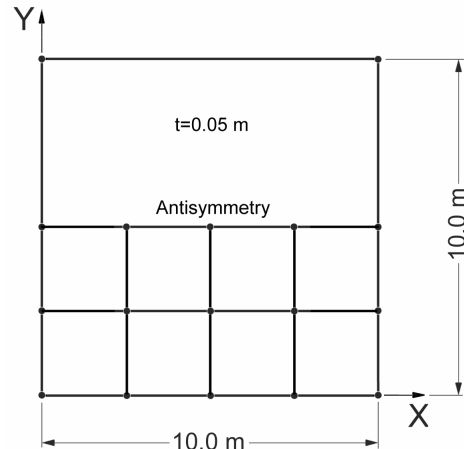


Figure VNF8: Problem sketch

Mode	Target	TRI3	QUAD4	TRI6	QUAD8	QUAD9
1	1.029	1.003 (-2.5%)	1.004 (-2.4%)	1.017 (-0.3%)	0.998 (-3.0%)	1.025 (-0.4%)
2	3.753	3.629 (-3.3%)	3.582 (-4.6%)	3.701 (-1.4%)	3.541 (-5.6%)	3.735 (-0.5%)
3	7.730	7.234 (-6.4%)	7.093 (-8.2%)	7.574 (-2.0%)	6.820 (-11.8%)	7.800 (0.9%)
4	8.561	8.289 (-3.2%)	8.032 (-6.2%)	8.484 (-0.9%)	7.862 (-8.2%)	8.679 (1.4%)
5	11.728/11.185 <sup>1</sup>	10.563 (-9.9%)	9.996 (-15%)	11.697 (4.6%)	9.951 (-11%)	11.275 (0.8%)
6	17.818/15.755 <sup>1</sup>	15.340 (-14%)	14.117 (-36%)	16.026 (1.7%)	13.500 (-14%)	16.588 (5.3%)

Table VNF8-1: Summary of natural frequencies (Hz) – lumped mass matrix

Mode	Target	TRI3	QUAD4	TRI6	QUAD8	QUAD9
1	1.029	1.028 (-0.1%)	1.024 (-0.5%)	1.036 (0.7%)	1.024 (-0.5%)	1.025 (-0.4%)
2	3.753	3.841 (2.3%)	3.779 (0.7%)	3.821 (1.8%)	3.731 (-0.6%)	3.741 (-0.3%)
3	7.730	8.266 (6.9%)	8.114 (5.0%)	8.157 (5.5%)	7.635 (-1.2%)	7.905 (2.3%)
4	8.561	9.303 (8.7%)	9.003 (5.2%)	8.966 (4.7%)	8.615 (0.6%)	8.773 (2.5%)
5	11.728/11.185 <sup>1</sup>	12.489 (6.5%)	11.739 (0.1%)	12.721 (13.7%)	11.19 (0.0%)	11.451 (2.4%)
6	17.818/15.755 <sup>1</sup>	18.119 (1.7%)	17.211 (-3.4%)	17.622 (11.9%)	16.862 (7.0%)	17.013 (8.0%)

Table VNF8-2: Summary of natural frequencies (Hz) – consistent mass matrix

<sup>1</sup> Reference finite element solutions for low and high order elements, respectively.

## VNF9: Free Thin Square Plate

Source: Reference 1 (Test 12)  
 Elements: All plate/shell elements  
 Keywords: Eigenvalue shift, consistent mass matrix, lumped mass matrix

The square plate shown is free to move in the out-of-plane direction. The natural frequencies of the plate are calculated.

Material data:

Young's modulus  $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$   
 Mass density  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$

Mesh data:

High order elements:  $4 \times 4$  (as shown)  
 Low order elements:  $8 \times 8$

Note that this model has three zero frequencies corresponding to the three rigid-body modes.

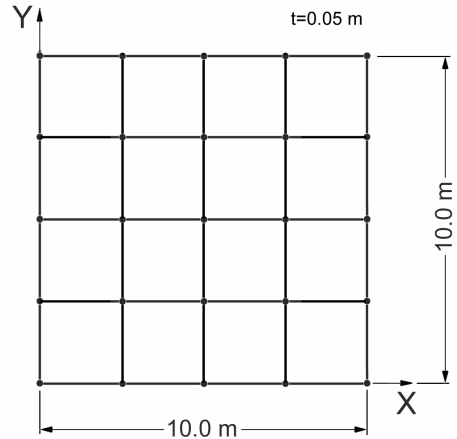


Figure VNF9: Problem sketch

Mode	Target	TRI3	QUAD4	TRI6	QUAD8	QUAD9
4	1.622	1.589 (-2.0%)	1.583 (-2.4%)	1.602 (-0.3%)	1.567 (-3.4%)	1.622 (0.0%)
5	2.360	2.246 (-4.8%)	2.240 (-5.1%)	2.283 (-3.3%)	2.183 (-7.5%)	2.362 (<0.1%)
6	2.922	2.816 (-3.6%)	2.803 (-4.1%)	2.852 (-4.1%)	2.749 (-5.9%)	2.930 (0.3%)
7	4.233	3.941 (-6.9%)	3.952 (-6.6%)	4.059 (-2.1%)	3.879 (-8.4%)	4.199 (-0.8%)
8	4.233	4.105 (-3.0%)	3.952 (-6.6%)	4.130 (-2.4%)	3.879 (-8.4%)	4.199 (-0.8%)
9	7.416	6.850 (-7.6%)	6.815 (-8.1%)	7.000 (-5.6%)	6.546 (-11.7%)	7.446 (0.4%)
10	N/A	6.984	6.815	7.108	6.546	7.446

Table VNF9-1: Summary of natural frequencies (Hz) – lumped mass matrix

Mode	Target	TRI3	QUAD4	TRI6	QUAD8	QUAD9
4	1.622	1.635 (0.8%)	1.629 (0.4%)	1.627 (0.3%)	1.620 (-0.1%)	1.622 (0.0%)
5	2.360	2.394 (1.4%)	2.388 (1.2%)	2.367 (0.3%)	2.363 (0.1%)	2.366 (0.3%)
6	2.922	2.989 (2.3%)	2.977 (1.9%)	2.937 (0.5%)	2.929 (0.2%)	2.936 (0.5%)
7	4.233	4.313 (1.9%)	4.258 (0.6%)	4.224 (-0.2%)	4.190 (-1.0%)	4.208(-0.6%)
8	4.233	4.349 (2.7%)	4.258 (0.6%)	4.274 (1.0%)	4.190 (-1.0%)	4.208(-0.6%)
9	7.416	7.866 (6.1%)	7.780 (4.9%)	7.541 (1.7%)	7.257 (-2.1%)	7.546 (1.8%)
10	N/A	7.923	7.780	7.565	7.257	7.546

Table VNF9-2: Summary of natural frequencies (Hz) – consistent mass matrix

## VNF10: Simply Supported Thin Square Plate

Source: Reference 1 (Test 13)  
 Elements: All plate/shell elements  
 Keywords: Consistent mass matrix, lumped mass matrix

The thin square plate shown is  $0.05m$  thick and is simply supported at the four edges. All the in-plane displacements are fixed.

Material data:

Young's modulus  $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$

Poisson's ratio  $\nu = 0.3$

Mass density  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$

Boundary support conditions:

$D_z = \theta_y = 0$  along lines  $X = 0$  and  $X = 10$

$D_z = \theta_x = 0$  along lines  $Y = 0$  and  $Y = 10$

Mesh data:

High order elements:  $4 \times 4$  (as shown)

Low order elements:  $8 \times 8$

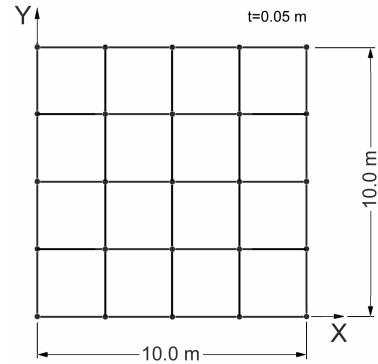


Figure VNF10: Problem sketch

Mode	Target	TRI3	QUAD4	TRI6 Mesh1	TRI6 Mesh2	QUAD8	QUAD9
1	2.377	2.391 (0.6%)	2.349 (-1.2%)	2.437 (2.5%)	2.422 (1.9%)	2.375 (-0.1%)	2.376 (<0.1%)
2	5.942	6.038 (1.6%)	5.830 (-1.9%)	6.091 (2.5%)	6.096 (2.6%)	5.940 (<0.1%)	5.959 (0.3%)
3	5.942	6.038 (1.6%)	5.830 (-1.9%)	6.330 (6.5%)	6.096 (2.6%)	5.940 (<0.1%)	5.959 (0.3%)
4	9.507	9.743 (2.5%)	9.068 (-4.6%)	10.723 (13%)	11.244 (18%)	9.463 (-0.5%)	9.497 (-0.1%)
5	11.884	12.318 (3.7%)	11.620 (-2.2%)	12.659 (6.5%)	12.732 (7.1%)	11.994 (0.9%)	12.123 (2.0%)
6	11.884	12.320 (3.7%)	11.620 (-2.2%)	12.989 (9.3%)	12.822 (7.9%)	11.994 (0.9%)	12.123 (2.0%)
7	15.449	16.064 (4.0%)	14.461 (-6.4%)	17.185 (11%)	18.897 (22%)	15.227 (-1.4%)	15.520 (0.5%)
8	15.449	16.139 (4.5%)	14.461 (-6.4%)	20.241 (31%)	18.897 (22%)	15.227 (-1.4%)	15.520 (0.5%)

Table VNF10-1: Summary of natural frequencies (Hz) – lumped mass matrix

Mode	Target	TRI3	QUAD4	TRI6 Mesh1	TRI6 Mesh2	QUAD8	QUAD9
1	2.377	2.453 (3.2%)	2.410 (1.4%)	2.441 (2.7%)	2.407 (1.3%)	2.384 (0.3%)	2.378 (<0.1%)
2	5.942	6.374 (7.3%)	6.217 (4.6%)	6.136 (3.3%)	6.147 (3.5%)	6.057 (1.9%)	5.993 (0.9%)
3	5.942	6.492 (9.3%)	6.217 (4.6%)	6.400 (7.7%)	6.147 (3.5%)	6.057 (1.9%)	5.993 (0.9%)
4	9.507	10.737 (12.9%)	10.049 (5.7%)	10.894 (15%)	11.540 (21%)	9.992 (5.1%)	9.600 (1.0%)
5	11.884	13.963 (17.5%)	13.205 (11.1%)	13.050 (9.8%)	12.819 (7.9%)	12.757 (7.3%)	12.431 (4.6%)
6	11.884	14.017 (17.9%)	13.205 (11.1%)	13.497 (14%)	13.113 (10%)	12.757 (7.3%)	12.431 (4.6%)
7	15.449	18.271 (18.3%)	17.080 (10.6%)	17.672 (14%)	19.809 (28%)	14.242 (-7.8%)	16.010 (3.6%)
8	15.449	19.436 (25.8%)	17.080 (10.6%)	21.141 (37%)	19.809 (28%)	14.242 (-7.8%)	16.010 (3.6%)

Table VNF10-2: Summary of natural frequencies (Hz) – consistent mass matrix

# VNF11: Simply Supported Thin Annular Plate

Source: Reference 1 (Test 14)  
 Elements: All plate/shell elements  
 Attributes: Node restraint in UCS  
 Keywords: Consistent mass matrix, lumped mass matrix

The annular plate shown is  $0.06m$  thick and is simply supported at the outer boundary. All in-plane displacements are fixed and around the circumference, lateral deflection and rotation about the radial direction ( $\theta_{\chi'}$ ) are fixed.

Material data:

Young's modulus  $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$   
 Mass density  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$

Mesh data:

High order elements:  $3 \times 16$  (as shown)  
 Low order elements:  $5 \times 32$

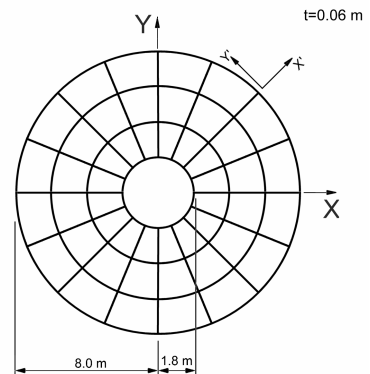


Figure VNF11: Problem sketch

Mode	Target	TRI3	QUAD4	TRI6	QUAD8	QUAD9
1	1.870	1.875 (0.3%)	1.855 (-0.8%)	1.859 (-0.6%)	1.840 (-1.6%)	1.863 (-0.4%)
2 & 3	5.137	5.262 (2.4%)	5.167 (0.6%)	5.158 (0.4%)	5.112 (-0.5%)	5.134 (-0.1%)
4 & 5	9.673	9.850 (1.8%)	9.647 (-0.3%)	9.773 (1.0%)	9.678 (0.1%)	9.682 (0.1%)
6	14.850	14.330 (-3.5%)	14.154 (-4.7%)	14.549 (-2.0%)	13.944 (-6.1%)	14.767 (-0.6%)
7 & 8	15.573	15.836 (1.7%)	15.318 (-1.6%)	15.928 (2.3%)	15.576 (0.0%)	15.603 (0.2%)
9 & 10	18.382	18.356 (-0.1%)	17.675 (-3.8%)	18.163 (-1.2%)	17.384 (-5.4%)	18.300 (-0.4%)

Table VNF11-1: Summary of natural frequencies (Hz) – lumped mass matrix

Mode	Target	TRI3	QUAD4	TRI6	QUAD8	QUAD9
1	1.870	1.901 (1.7%)	1.873 (0.2%)	1.874 (0.2%)	1.873 (0.2%)	1.873 (0.2%)
2 & 3	5.137	5.348 (4.1%)	5.241 (2.0%)	5.175 (0.7%)	5.152 (0.3%)	5.150 (0.3%)
4 & 5	9.673	10.156 (5.0%)	9.942 (2.8%)	9.793 (1.2%)	9.727 (0.6%)	9.701 (0.3%)
6	14.850	15.663 (5.5%)	15.371 (3.5%)	15.009 (1.1%)	14.918 (0.5%)	14.928 (0.5%)
7 & 8	15.573	16.691 (7.2%)	16.166 (3.8%)	16.008 (2.8%)	15.778 (1.3%)	15.653 (0.5%)
9 & 10	18.382	20.004 (8.8%)	19.160 (4.2%)	18.695 (1.7%)	18.531 (0.8%)	18.519 (0.7%)

Table VNF11-2: Summary of natural frequencies (Hz) – consistent mass matrix



## VNF12: Clamped Thin Rhombic Plate

Source: Reference 1 (Test 15)  
 Elements: All plate/shell elements  
 Keywords: Mesh distortion, rhombic plate, consistent mass matrix, lumped mass matrix

The skew thin plate shown is 0.05m thick.  
 All nodes along the boundaries are fully fixed. This problem is used to test the elements when a distorted mesh is used.

Material data:

Young's modulus  $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$   
 Mass density  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$

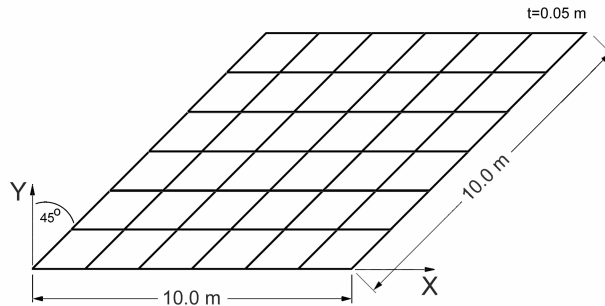


Figure VNF12: Problem sketch

Mesh data:

High order elements:  $6 \times 6$  (as shown)  
 Low order elements:  $12 \times 12$

Mode	Target	TRI3		QUAD4		TRI6		QUAD8		QUAD9	
1	7.938	7.949	(0.1%)	7.424	(-6.5%)	8.039	(1.3%)	7.911	(-0.3%)	7.908	(-0.4%)
2	12.835	12.996	(1.3%)	11.807	(-8.0%)	13.019	(1.4%)	12.886	(0.4%)	12.895	(0.5%)
3	17.941	18.139	(1.1%)	16.130	(-10.1%)	18.440	(2.8%)	18.198	(1.4%)	18.083	(0.8%)
4	19.133	19.169	(0.2%)	16.824	(-12.1%)	19.645	(2.7%)	19.030	(-0.5%)	19.029	(-0.5%)
5	24.009	24.194	(0.8%)	21.034	(-12.4%)	24.919	(3.8%)	24.624	(2.6%)	24.265	(1.1%)
6	27.922	28.354	(1.5%)	23.904	(-14.4%)	28.503	(2.1%)	28.193	(1.0%)	28.290	(1.3%)

Table VNF12-1: Summary of natural frequencies (Hz) – lumped mass matrix

Mode	Target	TRI3		QUAD4		TRI6		QUAD8		QUAD9	
1	7.938	8.060	(1.5%)	7.551	(-4.9%)	8.047	(1.4%)	7.937	(<0.1%)	7.917	(-0.3%)
2	12.835	13.376	(4.2%)	12.306	(-4.1%)	13.055	(1.7%)	13.056	(1.7%)	12.944	(0.8%)
3	17.941	18.964	(5.7%)	17.234	(-3.9%)	18.543	(3.4%)	18.766	(4.6%)	18.234	(1.6%)
4	19.133	19.871	(3.9%)	17.437	(-8.9%)	19.736	(3.2%)	19.232	(0.5%)	19.101	(-0.2%)
5	24.009	25.774	(7.4%)	23.167	(-3.5%)	25.169	(4.8%)	26.043	(8.5%)	24.644	(2.6%)
6	27.922	30.152	(8.0%)	25.718	(-7.9%)	28.814	(3.2%)	29.101	(4.2%)	28.604	(2.4%)

Table VNF12-2: Summary of natural frequencies (Hz) – consistent mass matrix

## VNF13: Cantilevered Thin Square Plate

Source: Reference 1 (Test 16)  
 Elements: All plate/shell elements  
 Keywords: Mesh distortion, consistent mass matrix, lumped mass matrix

This test is used to investigate the effect of mesh distortion on element behaviour. Two sets of meshes are considered, each consisting of a regular and an irregular mesh.

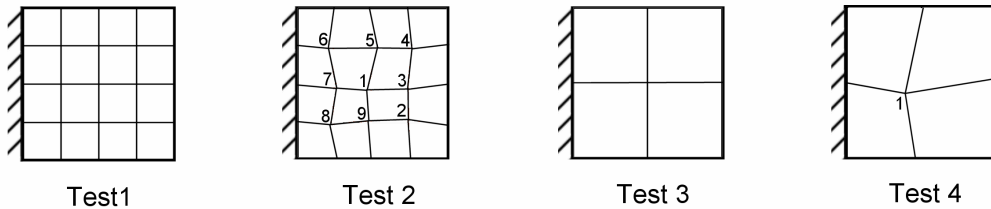


Figure VNF13: Problem sketch

### Geometry data:

Plate dimension  $10\text{ m} \times 10\text{ m}$  square  
 Thickness  $0.05\text{ m}$

### Material data:

Young's modulus  $E = 200 \times 10^9\text{ Pa}$   
 Mass density  $\rho = 8000\text{ kg/m}^3$

### Mesh data:

High order elements: All meshes as shown  
 Low order elements: Tests 1 and 2 only

Mesh	Node	X	Y
Test2	1	4.00	4.00
	2	7.25	2.75
	3	7.50	4.75
	4	7.75	7.25
	5	5.25	7.25
	6	2.25	7.25
	7	2.50	4.75
	8	2.25	2.25
	9	4.76	2.50
Test4	1	4.00	4.00

Table VNF13-1: Coordinates for internal nodes in distorted meshes  
 (relative to the lower-left corner node)

Mode	Target	TRI3		QUAD4	
		Test1	Test2	Test1	Test2
1	0.421	0.410 (-2.6%)	0.409 (-2.9%)	0.406 (-3.6%)	0.405 (-3.8%)
2	1.029	0.996 (-3.2%)	0.997 (-3.1%)	0.950 (-7.7%)	0.947 (-8.0%)
3	2.582	2.404 (-6.9%)	2.418 (-6.4%)	2.289 (-11.3%)	2.280 (-11.7%)
4	3.306	2.897 (-12.4%)	2.865 (-13.3%)	2.764 (-16.4%)	2.750 (-16.8%)
5	3.753	3.553 (-5.3%)	3.639 (-3.0%)	3.192 (-14.9%)	3.180 (-15.3%)
6	6.555	5.871 (-10.4%)	5.913 (-9.8%)	4.963 (-24.3%)	4.938 (-24.7%)

Table VNF13-2: Summary of natural frequencies (Hz)  
- low order elements with lumped mass matrix (Test 1 and Test 2)

Mode	Target	TRI6		QUAD8		QUAD9	
		Test1	Test2	Test1	Test2	Test1	Test2
1	0.421	0.417 (-1.0%)	0.417 (-1.0%)	0.414 (-1.7%)	0.414 (-1.7%)	0.418 (-0.7%)	0.418 (-0.7%)
2	1.029	1.028 (-0.1%)	1.025 (-0.4%)	0.998 (-3.0%)	0.996 (-3.2%)	1.025 (-0.5%)	1.024 (-0.5%)
3	2.582	2.524 (-2.2%)	2.529 (-2.1%)	2.445 (-5.3%)	2.446 (-5.3%)	2.568 (-0.5%)	2.569 (-0.5%)
4	3.306	3.250 (-1.7%)	3.258 (-1.5%)	3.081 (-6.8%)	3.068 (-7.2%)	3.281 (-0.8%)	3.284 (-0.7%)
5	3.753	3.792 (1.0%)	3.765 (0.3%)	3.541 (-5.7%)	3.536 (-5.8%)	3.735 (-0.5%)	3.732 (-0.6%)
6	6.555	6.750 (3.0%)	6.696 (2.2%)	6.023 (-8.1%)	5.998 (-8.5%)	6.542 (-0.2%)	6.538 (-0.3%)

Table VNF13-3: Summary of natural frequencies (Hz)  
- high order elements with lumped mass matrix (Test 1 and Test 2)

Mode	Target	TRI3		QUAD4	
		Test1	Test2	Test1	Test2
1	0.421	0.420 (-0.2%)	0.420 (-0.2%)	0.416 (-1.2%)	0.415 (-1.4%)
2	1.029	1.071 (4.1%)	1.075 (4.5%)	1.023 (-0.6%)	1.024 (-0.5%)
3	2.582	2.846 (10.0%)	2.879 (11.5%)	2.703 (4.7%)	2.714 (5.1%)
4	3.306	3.622 (9.6%)	3.634 (9.9%)	3.440 (4.1%)	3.457 (4.6%)
5	3.753	4.299 (14.5%)	4.406 (17.4%)	3.911 (4.2%)	3.921 (4.5%)
6	6.555	8.062 (23.0%)	8.180 (24.8%)	7.015 (7.0%)	7.040 (7.4%)

Table VNF13-4: Summary of natural frequencies (Hz)  
- low order elements with consistent mass matrix (Test 1 and Test 2)

Mode	Target	TRI6		QUAD8		QUAD9	
		Test1	Test2	Test1	Test2	Test1	Test2
1	0.421	0.419 (-0.5%)	0.419 (-0.5%)	0.419 (-0.5%)	0.419 (-0.5%)	0.418 (-0.7%)	0.418 (-0.7%)
2	1.029	1.039 (1.0%)	1.037 (0.8%)	1.024 (-0.5%)	1.024 (-0.5%)	1.025 (-0.4%)	1.025 (-0.5%)
3	2.582	2.581 (0.0%)	2.584 (0.1%)	2.570 (-0.5%)	2.569 (-0.5%)	2.572 (-0.4%)	2.573 (-0.3%)
4	3.306	3.346 (1.2%)	3.362 (1.7%)	3.281 (-0.8%)	3.279 (-0.8%)	3.288 (-0.5%)	3.290 (-0.5%)
5	3.753	3.895 (3.8%)	3.879 (3.4%)	3.731 (-0.6%)	3.737 (-0.5%)	3.741 (-0.3%)	3.743 (-0.3%)
6	6.555	7.022 (7.1%)	6.975 (6.4%)	6.571 (0.2%)	6.539 (-0.3%)	6.567 (0.2%)	6.581 (0.4%)

Table VNF13-5: Summary of natural frequencies (Hz)  
- high order elements with consistent mass matrix (Test 1 and Test 2)

Mode	Target	TRI6		QUAD8		QUAD9	
		Test3	Test4	Test3	Test4	Test3	Test4
1	0.421	0.413 (-1.9%)	0.413 (-1.9%)	0.404 (-4.0%)	0.401 (-1.7%)	0.419 (-0.5%)	0.419 (-0.5%)
2	1.029	1.041 (1.2%)	1.032 (0.3%)	0.933 (-9.3%)	0.921 (-10.7%)	1.028 (-0.2%)	1.025 (-0.6%)
3	2.582	2.436 (-5.7%)	2.392 (-7.4%)	2.128 (-17.6%)	2.099 (-18.7%)	2.656 (2.9%)	2.628 (1.8%)
4	3.306	3.293 (0.4%)	3.355 (1.5%)	2.708 (-18.1%)	2.694 (-18.5%)	3.385 (2.4%)	3.346 (1.2%)
5	3.753	4.219 (12.4%)	3.885 (3.5%)	3.126 (-16.9%)	3.065 (-18.4%)	3.902 (4.0%)	3.888 (3.4%)
6	6.555	6.893 (5.2%)	6.811 (3.9%)	4.145 (-36.8%)	3.888 (-40.7%)	6.860 (4.7%)	6.713 (2.4%)

Table VNF13-6: Summary of natural frequencies (Hz) – lumped mass matrix (Test 3 and Test 4)

Mode	Target	TRI6		QUAD8		QUAD9	
		Test3	Test4	Test3	Test4	Test3	Test4
1	0.421	0.421 (0.0%)	0.422 (1.7%)	0.421 (0.0%)	0.422 (0.2%)	0.419 (-0.5%)	0.420 (-0.2%)
2	1.029	1.089 (5.8%)	1.080 (7.4%)	1.019 (-1.2%)	1.026 (-0.3%)	1.029 (-0.2%)	1.031 (0.2%)
3	2.582	2.730 (5.7%)	2.722 (13.4%)	2.724 (5.5%)	2.702 (4.6%)	2.703 (4.7%)	2.703 (4.7%)
4	3.306	3.707 (12.1%)	3.750 (12.7%)	3.446 (4.2%)	3.420 (3.4%)	3.468 (4.9%)	3.448 (4.3%)
5	3.753	5.069 (35.1%)	4.611 (24.5%)	3.918 (4.2%)	3.917 (4.4%)	3.945 (5.1%)	3.962 (5.4%)
6	6.555	8.773 (33.8%)	8.668 (33.3%)	5.719 (-12.8%)	5.356 (-18.3%)	7.195 (9.8%)	7.265 (10.8%)

Table VNF13-7: Summary of natural frequencies (Hz) – consistent mass matrix (Test 3 and Test 4)

## VNF14: Simply Supported Thick Square Plate – Part A

---

Source:	Reference 1 (Test 21a)
Elements:	All plate/shell elements
Keywords:	Secondary restraint, transverse shear deformation, thick plate, consistent mass matrix, lumped mass matrix

---

The simply supported square plate is analysed. As the length to thickness ratio is 10, transverse shear should be considered. The simply supported condition is modelled by enforcing both lateral deflection and rotation about the normal to the boundary to be zero.

### Material data:

Young's modulus	$E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$
Poisson's ratio	$\nu = 0.3$
Mass density	$\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$

### Mesh data:

High order elements:	$4 \times 4$ (as shown)
Low order elements:	$8 \times 8$

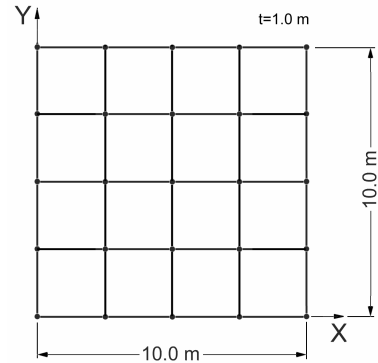


Figure VNF14: Problem sketch

Mode	Target	TRI3			QUAD4			TRI6			QUAD8			QUAD9		
1	45.897	47.825	(4.2%)		46.979	(2.4%)		45.913	(0.0%)		46.172	(0.6%)		46.244	(0.8%)	
2	109.44	120.75	(10.3%)		116.61	(6.5%)		108.17	(-1.2%)		109.28	(-0.1%)		111.50	(1.9%)	
3	109.44	120.75	(10.3%)		116.61	(6.5%)		110.51	(1.0%)		109.28	(-0.1%)		111.50	(1.9%)	
4	167.89	194.86	(16.1%)		181.37	(8.0%)		166.76	(-0.7%)		168.37	(0.3%)		171.35	(2.1%)	
5	204.51	246.37	(20.5%)		232.39	(13.6%)		196.99	(-3.7%)		188.74	(-7.7%)		212.51	(3.9%)	
6	204.51	246.40	(20.5%)		232.39	(13.6%)		208.87	(2.1%)		188.74	(-7.7%)		212.51	(3.9%)	
7	256.50	321.27	(25.3%)		289.23	(12.8%)		244.79	(-4.6%)		222.13	(-13.4%)		263.46	(2.7%)	
8	256.50	322.77	(25.8%)		289.23	(12.8%)		257.97	(0.6%)		222.13	(-13.4%)		263.46	(2.7%)	
9	366.62	433.88	(18.3%)		384.28	(4.8%)		284.40	(-22.4%)		246.04	(-32.9%)		316.51	(-13.7%)	
10	366.62	434.12	(18.4%)		392.75	(7.1%)		313.23	(-14.6%)		246.04	(-32.9%)		316.51	(-13.7%)	

Table VNF14-1: Summary of natural frequencies (Hz) – lumped mass matrix

Mode	Target	TRI3		QUAD4		TRI6		QUAD8		QUAD9	
1	45.897	48.654	(6.0%)	47.811	(4.2%)	45.625	(-0.6%)	45.874	(-0.1%)	45.941	(0.1%)
2	109.44	124.80	(14.0%)	121.86	(11.3%)	107.06	(-2.2%)	107.95	(-1.4%)	110.40	(0.9%)
3	109.44	127.11	(16.1%)	121.86	(11.3%)	109.89	(0.4%)	107.95	(-1.4%)	110.40	(0.9%)
4	167.89	207.51	(23.6%)	194.69	(16.0%)	166.36	(-0.9%)	171.50	(2.1%)	169.54	(1.0%)
5	204.51	267.09	(30.6%)	254.01	(24.2%)	198.59	(-2.9%)	181.75	(-11.1%)	212.68	(4.0%)
6	204.51	268.15	(31.1%)	254.01	(24.2%)	210.76	(3.1%)	181.75	(-11.1%)	212.68	(4.0%)
7	256.50	345.05	(34.5%)	324.79	(26.6%)	246.70	(-3.8%)	206.32	(-19.6%)	264.48	(3.1%)
8	256.50	366.95	(43.1%)	324.79	(26.6%)	268.23	(4.6%)	206.32	(-19.6%)	264.48	(3.1%)
9	366.62	494.40	(34.9%)	451.52	(23.2%)	292.84	(-20.1%)	259.74	(-29.2%)	343.98	(-6.2%)
10	366.62	496.07	(35.3%)	457.72	(24.8%)	320.41	(-12.6%)	259.74	(-29.2%)	343.98	(-6.2%)

Table VNF14-2: Summary of natural frequencies (Hz) – consistent mass matrix

Note that the low order elements give consistently high frequency values due to the exclusion of transverse shear deformation from the element formulation.

Comparing the results in Tables VNF14-1 and VNF14-2 with those in Tables VNF15-1 and VNF15-2, we can find that fixing the rotation about the normal to the boundary can increase the frequency results of the thick plate elements (TRI6, QUAD8 and QUAD9), but has little effect on results of the thin plate elements (TRI3 and QUAD4).

## VNF15: Simply Supported Thick Square Plate – Part B

Source: Reference 1 (Test 21b)

Elements: All plate/shell elements

Keywords: Secondary restraint, thick plate, consistent mass matrix, lumped mass matrix

Similar to VNF14, a simply supported square plate is analysed. In this test the support condition is modelled by enforcing only the deflection to be zero. The rotation about the normal to the boundary is set free. The same mesh densities are used.

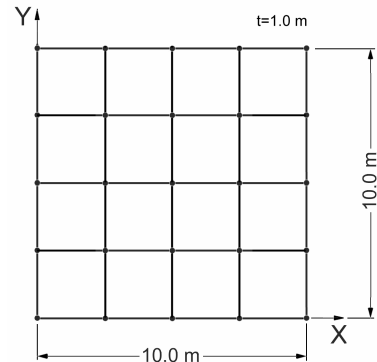


Figure VNF15: Problem sketch

Mode	Target	TRI3		QUAD4		TRI6		QUAD8		QUAD9	
1	45.897	47.822	(4.2%)	46.979	(2.4%)	44.632	(-2.8%)	44.816	(-2.4%)	44.887	(-2.2%)
2	109.44	120.58	(10.2%)	116.61	(6.5%)	105.99	(-3.2%)	107.41	(-1.9%)	109.63	(-0.2%)
3	109.44	120.64	(10.2%)	116.61	(6.5%)	108.47	(-0.9%)	107.41	(-1.9%)	109.63	(-0.2%)
4	167.89	194.83	(18.3%)	181.37	(8.0%)	161.04	(-4.1%)	164.15	(-2.2%)	167.25	(-0.4%)
5	204.51	245.58	(17.2%)	232.39	(13.6%)	194.26	(-5.0%)	186.74	(-8.7%)	210.74	(3.0%)
6	204.51	245.59	(23.1%)	232.39	(13.6%)	205.96	(0.7%)	186.96	(-8.6%)	210.96	(3.1%)
7	256.50	320.93	(25.5%)	289.22	(12.8%)	234.07	(-8.7%)	221.34	(-13.7%)	258.87	(0.9%)
8	256.50	322.00	(25.7%)	289.22	(12.8%)	249.64	(-2.7%)	221.34	(-13.7%)	258.87	(0.9%)
9	366.62	431.56	(18.3%)	384.25	(4.8%)	278.51	(-24%)	239.84	(-34.6%)	315.49	(-13.9%)
10	366.62	432.05	(18.4%)	392.74	(7.1%)	291.62	(-20%)	239.84	(-34.6%)	315.49	(-13.9%)

Table VNF15-1: Summary of natural frequencies (Hz) – lumped mass matrix

Mode	Target	TRI3		QUAD4		TRI6		QUAD8		QUAD9	
1	45.897	48.65	(6.0%)	47.811	(4.2%)	44.351	(-3.4%)	44.522	(-3.0%)	44.590	(-2.8%)
2	109.44	124.69	(14.5%)	121.86	(11.4%)	104.87	(-4.2%)	106.03	(-3.1%)	108.53	(-0.8%)
3	109.44	126.92	(15.5%)	121.86	(11.4%)	107.86	(-1.4%)	106.03	(-3.1%)	108.53	(-0.8%)
4	167.89	207.47	(24.9%)	194.68	(16.0%)	160.53	(-4.4%)	166.65	(-0.7%)	165.40	(-1.5%)
5	204.51	266.32	(28.9%)	254.01	(24.2%)	195.79	(-3.2%)	179.63	(-12.2%)	210.87	(3.1%)
6	204.51	267.29	(31.9%)	254.01	(24.2%)	207.76	(1.6%)	179.87	(-12.0%)	211.09	(3.2%)
7	256.50	344.73	(36.8%)	324.78	(26.6%)	235.46	(-8.2%)	205.56	(-19.9%)	259.73	(1.3%)
8	256.50	365.95	(40.9%)	324.78	(26.6%)	259.27	(1.1%)	205.56	(-19.9%)	259.73	(1.3%)
9	366.62	492.35	(33.7%)	451.49	(23.1%)	286.66	(-22%)	252.09	(-31.2%)	342.44	(-6.6%)
10	366.62	493.63	(34.7%)	457.71	(24.8%)	299.37	(-18%)	252.09	(-31.2%)	342.76	(-6.5%)

Table VNF15-2: Summary of natural frequencies (Hz) – consistent mass matrix

## VNF16: Clamped Thick Rhombic Plate

Source:	Reference 1 (Test 22)
Elements:	All plate/shell elements
Keywords:	Mesh distortion, transverse shear deformation, thick plate, consistent mass matrix, lumped mass matrix

Similarly to VNF12, this problem is used to test the elements when a distorted mesh is used. The meshes are the same, except that the plate thickness has been increased from 0.05 m to 1.0 m.

As shown in Tables VNF16-1 and VNF16-2, results for TRI3 and QUAD4 are much higher than the target values. This is because the transverse shear deformation is not considered in the formulation of these two elements.

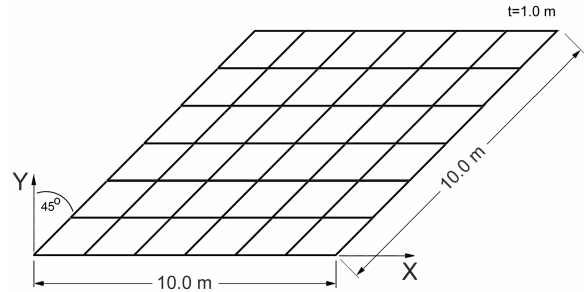


Figure VNF16: Problem sketch

Mode	Target	TRI3	QUAD4	TRI6	QUAD8	QUAD9
1	133.95	158.98 (18.7%)	148.47 (10.8%)	132.41 (-1.1%)	134.49 (0.4%)	134.93 (0.7%)
2	201.41	259.91 (29.0%)	236.15 (17.2%)	199.62 (-0.9%)	198.55 (-1.4%)	206.02 (2.3%)
3	265.81	362.78 (36.5%)	322.60 (21.4%)	262.19 (-1.4%)	261.06 (-1.8%)	274.50 (3.3%)
4	282.74	383.38 (35.6%)	336.47 (19.0%)	276.66 (-2.2%)	280.85 (-0.7%)	287.78 (1.8%)
5	334.45	483.88 (44.7%)	420.68 (25.8%)	326.72 (-2.3%)	324.20 (-3.1%)	348.53 (4.2%)
6	N/A	567.07	478.08	367.71	351.14	392.80

Table VNF16-1: Summary of natural frequencies (in Hz) – lumped mass matrix

Mode	Target	TRI3	QUAD4	TRI6	QUAD8	QUAD9
1	133.95	158.42 (18.3%)	148.94 (11.2%)	130.93 (-2.3%)	132.59 (-1.0%)	133.71 (-0.2%)
2	201.41	259.05 (28.6%)	240.16 (19.2%)	196.18 (-2.6%)	194.41 (-3.5%)	203.42 (1.0%)
3	265.81	361.78 (36.1%)	332.78 (25.2%)	256.94 (-3.3%)	256.20 (-3.6%)	270.93 (1.9%)
4	282.74	378.16 (33.8%)	337.41 (19.3%)	270.53 (-4.3%)	270.81 (-4.2%)	282.77 (<0.1%)
5	334.45	483.11 (44.4%)	442.00 (32.2%)	320.26 (-4.2%)	321.56 (-3.9%)	344.86 (3.1%)
6	N/A	558.66	490.44	359.10	336.12	386.32

Table VNF16-2: Summary of natural frequencies (Hz) – consistent mass matrix



## VNF17: Simply Supported Thick Annular Plate

Source: Reference 1 (Test 23)  
 Elements: All plate/shell elements  
 Attributes: Node restraint in UCS  
 Keywords: Transverse shear deformation, thick plate, consistent mass matrix, lumped mass matrix

Similarly to VNF11, an annular plate is analysed. The meshes are the same, except that the plate thickness has been increased from 0.06 m to 0.6 m so that the transverse shear must be considered to get accurate results.

Mesh data:

High order elements:  $3 \times 16$  (as shown)  
 Low order elements:  $5 \times 32$

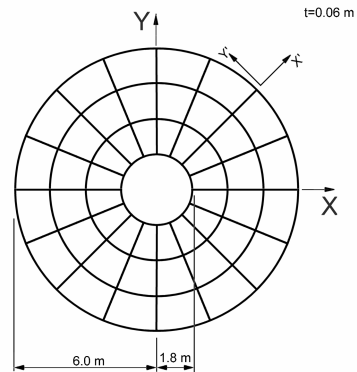


Figure VNF17: Problem sketch

Mode	Target	TRI3	QUAD4	TRI6	QUAD8	QUAD9
1	18.58	18.75 (0.9%)	18.55 (-0.2%)	18.46 (-0.6%)	18.32 (-1.4%)	18.56 (-0.1%)
2 & 3	48.92	52.62 (7.6%)	51.67 (5.6%)	49.09 (0.3%)	48.98 (0.1%)	49.28 (0.7%)
4 & 5	92.59	98.50 (6.4%)	96.47 (4.2%)	92.36 (-0.2%)	93.07 (0.5%)	93.43 (0.9%)
6	140.15	143.30 (2.2%)	141.54 (1.0%)	135.57 (-3.3%)	132.73 (-5.3%)	142.15 (1.4%)
7 & 8	N/A	158.36	153.18	144.83	146.12	147.84
9 & 10	166.36	183.56 (10.3%)	176.75 (6.2%)	161.80 (-2.7%)	158.56 (-4.7%)	169.49 (1.9%)

Table VNF17-1: Summary of natural frequencies (Hz) – lumped mass matrix

Mode	Target	TRI3	QUAD4	TRI6	QUAD8	QUAD9
1	18.58	18.94 (1.9%)	18.67 (0.5%)	18.54 -0.2%	18.58 (0%)	18.59 (0.1%)
2 & 3	48.92	53.21 (8.8%)	52.15 (6.6%)	49.01 0.2%	49.14 (0.5%)	49.22 (0.6%)
4 & 5	92.59	100.54 (8.6%)	98.46 (6.3%)	91.62 -1.0%	92.47 (-0.1%)	92.83 (0.3%)
6	140.15	152.98 (9.2%)	150.20 (7.2%)	136.24 -2.8%	136.64 (-2.5%)	140.86 (0.5%)
7 & 8	N/A	164.12	159.1	143.43	144.87	146.39
9 & 10	166.36	195.30 (17.4%)	187.06 (12.4%)	162.36 -2.4%	162.58 (-2.3%)	168.17 (1.1%)

Table VNF17-2: Summary of natural frequencies (Hz) – consistent mass matrix

## VNF18: Cantilevered Square Membrane

Source: Reference 1 (Test 31)  
 Elements: Plane stress elements  
 Keywords: Consistent mass matrix, lumped mass matrix

The square membrane shown is analysed. All the out-of-plane displacements and all the displacements on the left edge are fixed.

Material data:

Young's modulus  $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$   
 Mass density  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$

Mesh data:

High order elements:  $4 \times 4$  (as shown)  
 Low order elements:  $8 \times 8$

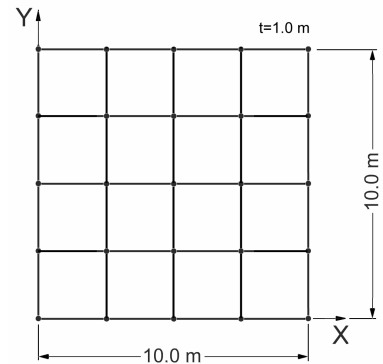


Figure VNF18: Problem sketch

Mode	Target	TRI3	QUAD4	TRI6	QUAD8	QUAD9
1	52.404	53.549 (2.2%)	52.426 (0.4%)	52.454 (0.1%)	52.176 (-0.4%)	52.513 (0.2%)
2	125.69	125.89 (0.2%)	125.59 (<0.1%)	125.80 (0.1%)	125.53 (-0.1%)	125.79 (<0.1%)
3	140.78	142.19 (1.0%)	139.48 (-0.6%)	140.56 (-0.2%)	138.56 (-1.6%)	141.24 (0.3%)
4	222.54	226.83 (1.9%)	214.51 (-2.7%)	219.32 (-1.4%)	209.78 (-5.7%)	224.11 (-1.4%)
5	241.41	243.51 (0.9%)	239.81 (-0.3%)	243.52 (0.9%)	241.72 (0.1%)	242.04 (0.3%)
6	255.74	259.46 (1.5%)	252.04 (-1.0%)	256.36 (0.2%)	253.41 (-0.9%)	256.34 (0.2%)

Table VNF18-1: Summary of natural frequencies (Hz) – lumped mass matrix

Mode	Target	TRI3	QUAD4	TRI6	QUAD8	QUAD9
1	52.404	53.848 (2.8%)	52.73 (0.6%)	52.646 (0.5%)	52.635 (0.4%)	52.515 (0.2%)
2	125.69	126.35 (0.5%)	126.06 (0.3%)	125.87 (0.1%)	125.87 (0.1%)	125.79 (<0.1%)
3	140.78	145.43 (3.3%)	142.76 (1.4%)	141.76 (0.7%)	141.47 (0.5%)	141.32 (0.4%)
4	222.54	237.64 (6.8%)	226.95 (2.0%)	225.67 (1.4%)	224.59 (0.9%)	224.54 (<0.1%)
5	241.41	250.51 (3.8%)	247.22 (2.4%)	243.90 (1.0%)	243.26 (0.8%)	242.75 (0.6%)
6	255.74	267.11 (4.4%)	259.43 (1.4%)	257.64 (0.7%)	256.76 (0.4%)	256.72 (0.4%)

Table VNF18-2: Summary of natural frequencies (Hz) – consistent mass matrix

## VNF19: Cantilevered Tapered Membrane

Source: Reference (Test 32)  
 Elements: Plane stress elements  
 Keywords: Consistent mass matrix, lumped mass matrix

Natural frequencies of the cantilevered tapered membrane are determined. All the nodes on the left side are fixed in both  $X$  and  $Y$  directions.

Material data:

Young's modulus  $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$   
 Mass density  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$

Mesh data:

High order elements:  $8 \times 4$  (as shown)  
 Low order elements:  $16 \times 8$

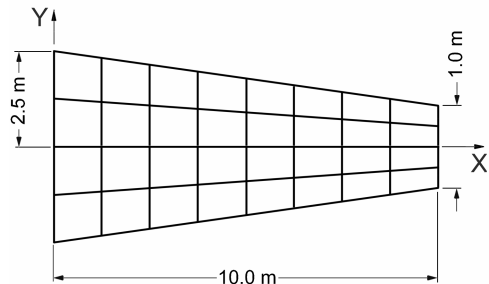


Figure VNF19: Problem sketch

Mode	Target	TRI3	QUAD4	TRI6	QUAD8	QUAD9
1	44.623	45.849 (2.7%)	44.562 (0.4%)	44.518 (-0.2%)	44.334 (-0.6%)	44.554 (-0.2%)
2	130.03	133.92 (3.0%)	129.68 (0.6%)	129.49 (-0.4%)	128.39 (-1.3%)	129.83 (-0.2%)
3	162.70	162.74 (<0.1%)	162.61 (<0.1%)	162.64 (<0.1%)	162.48 (-0.1%)	162.59 (-0.1%)
4	246.05	253.96 (3.2%)	244.39 (0.4%)	244.98 (-0.4%)	241.44 (-1.9%)	245.86 (-0.1%)
5	379.90	389.76 (2.6%)	374.82 (-0.1%)	378.44 (-0.4%)	370.12 (-2.6%)	380.10 (0.1%)
6	391.44	391.75 (<0.1%)	389.80 (-0.4%)	391.00 (-0.1%)	389.52 (-0.5%)	391.03 (-0.1%)

Table VNF19-1: Summary of natural frequencies (Hz) – lumped mass matrix

Mode	Target	TRI3	QUAD4	TRI6	QUAD8	QUAD9
1	44.623	45.972 (3.0%)	44.647 (0.5%)	44.652 (0.1%)	44.636 (<0.1%)	44.630 (<0.1%)
2	130.03	135.41 (4.1%)	131.04 (0.8%)	130.24 (0.2%)	130.14 (0.1%)	130.11 (0.1%)
3	162.70	162.99 (0.2%)	162.80 (<0.1%)	162.73 (<0.1%)	162.72 (<0.1%)	162.71 (<0.1%)
4	246.05	260.17 (5.7%)	250.32 (1.7%)	247.19 (0.5%)	246.63 (0.2%)	246.52 (0.2%)
5	379.90	394.13 (3.7%)	391.54 (3.1%)	383.62 (1.0%)	382.02 (0.6%)	381.79 (0.5%)
6	391.44	407.85 (4.2%)	393.10 (0.4%)	391.65 (0.1%)	391.55 (<0.1%)	391.51 (<0.1%)

Table VNF19-2: Summary of natural frequencies (Hz) – consistent mass matrix

## VNF20: Free Annular Membrane

Source: Reference (Test 33)  
 Elements: Plane stress elements  
 Keywords: Eigenvalue shift, consistent mass matrix, lumped mass matrix

Natural frequencies of the free annular membrane are determined.

Material data:

Young's modulus  $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$   
 Mass density  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$

Mesh data:

High order elements:  $3 \times 16$  (as shown)  
 Low order elements:  $5 \times 32$

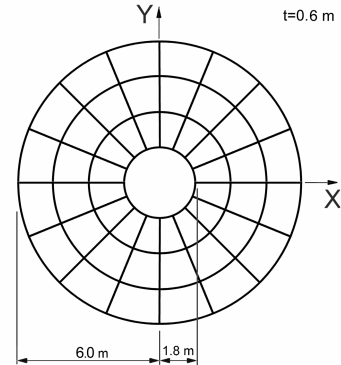


Figure VNF20: Problem sketch

Note that this model has three zero frequencies corresponding to the three rigid-body modes.

Mode	Target	TRI3	QUAD4	TRI6	QUAD8	QUAD9
4 & 5	129.24	134.40 (4.0%)	127.64 (-0.6%)	126.83 (-1.9%)	126.03 (-2.5%)	126.31 (-2.3%)
6	226.17	226.87 (0.3%)	224.52 (-0.6%)	224.01 (-1.0%)	223.19 (-1.3%)	224.21 (-0.9%)
7 & 8	234.74	230.21 (-1.9%)	229.61 (-2.2%)	232.20 (-1.1%)	230.68 (-1.7%)	233.20 (-0.7%)
9 & 10	264.66	272.44 (2.9%)	263.78 (0.2%)	265.27 (0.2%)	262.63 (-0.8%)	264.22 (-0.2%)
11&12	336.61	332.75 (-1.1%)	328.39 (-2.3%)	334.33 (-0.7%)	331.41 (-1.5%)	336.03 (-0.2%)
13&14	376.79	382.30 (1.5%)	368.06 (-1.5%)	378.74 (0.5%)	371.76 (-1.3%)	376.67 (<0.1%)

Table VNF20-1: Summary of natural frequencies (Hz) – lumped mass matrix

Mode	Target	TRI3	QUAD4	TRI6	QUAD8	QUAD9
4 & 5	129.24	135.427 (4.8%)	128.63 (-0.5%)	127.014 (-1.7%)	126.48 (-2.1%)	126.44 (-2.2%)
6	226.17	227.63 (0.6%)	225.22 (-0.4%)	224.29 (-0.8%)	224.28 (-0.8%)	224.28 (-0.8%)
7 & 8	234.74	235.19 (0.2%)	234.87 (<0.1%)	233.08 (-0.7%)	232.96 (-0.8%)	232.96 (-0.8%)
9 & 10	264.66	278.91 (5.4%)	270.75 (2.3%)	266.13 (0.6%)	264.82 (0.1%)	264.66 (0%)
11&12	336.61	343.71 (2.1%)	339.87 (1.0%)	336.05 (-0.2%)	335.71 (-0.3%)	335.70 (-0.3%)
13&14	376.79	400.79 (6.4%)	389.29 (3.3%)	381.80 (1.3%)	378.61 (0.5%)	378.37 (0.4%)

Table VNF20-2: Summary of natural frequencies (Hz) – consistent mass matrix

## VNF21: Free Cylinder Axisymmetric Vibration

Source: Reference (Test 41)  
 Elements Axisymmetric elements  
 Keywords: Eigenvalue shift, consistent mass matrix, lumped mass matrix

A free cylinder is analysed. Axisymmetric elements are used to determine the axisymmetric vibration modes. As there is no restraint applied, the cylinder has one rigid-body mode.

Material data:

Young's modulus  $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$   
 Mass density  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$

Mesh data:

High order elements  $8 \times 1$  (as shown)  
 Low order elements  $16 \times 3$

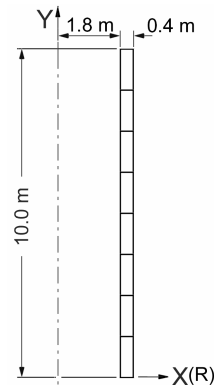


Figure VNF21: Problem sketch

Mode	Target	TRI3		QUAD4		TRI6		QUAD8		QUAD9	
2	243.53	243.21	(-0.1%)	243.21	(-0.1%)	243.43	(<0.1%)	243.24	(-0.1%)	243.47	(<0.1%)
3	377.41	375.88	(-0.4%)	374.08	(-0.9%)	376.49	(-0.2%)	356.49	(-5.5%)	377.13	(-0.1%)
4	394.11	388.61	(-1.4%)	388.08	(-1.5%)	385.67	(-2.1%)	356.88	(-9.4%)	394.04	(<0.1%)
5	397.72	390.29	(-1.9%)	388.15	(-2.4%)	386.72	(-2.8%)	375.85	(-5.5%)	397.60	(<0.1%)
6	421.87	413.94	(-1.9%)	397.92	(-5.7%)	397.13	(-5.9%)	393.65	(-6.7%)	404.82	(-4.0%)

Table VNF21-1: Summary of natural frequencies (Hz) – lumped mass matrix

Mode	Target	TRI3		QUAD4		TRI6		QUAD8		QUAD9	
2	243.53	244.00	(0.2%)	243.99	(0.2%)	243.50	(<0.1%)	243.50	(<0.1%)	243.50	(<0.1%)
3	377.41	379.88	(0.7%)	379.22	(0.5%)	377.49	(<0.1%)	377.46	(<0.1%)	377.46	(<0.1%)
4	394.11	394.74	(0.2%)	394.67	(0.2%)	394.34	(0.1%)	394.30	(<0.1%)	394.29	(<0.1%)
5	397.72	403.07	(1.3%)	400.17	(0.1%)	398.08	(0.1%)	397.97	(0.1%)	397.97	(0.1%)
6	421.87	429.72	(1.9%)	423.38	(0.4%)	407.32	(-3.4%)	406.44	(-3.7%)	406.40	(-3.7%)

Table VNF21-2: Summary of natural frequencies (Hz) – consistent mass matrix

## VNF22: Thick Hollow Sphere - Uniform Radial Vibration

Source: Reference 1 (Test 42)  
 Elements: Axisymmetric elements, sector-symmetry link  
 Attributes: Node restraint in UCS  
 Keywords: Radial vibration

Natural frequencies of a thick hollow sphere are determined. Only a sector is modelled to consider the uniform radial modes. Sector-symmetry links are used to enforce symmetry conditions.

Material data:

Young's modulus  $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$   
 Mass density  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$

Mesh data:

High order elements:  $5 \times 1$  ( $\alpha = 10^\circ$ ) (as shown)  
 Low order elements:  $10 \times 1$  ( $\alpha = 5^\circ$ )

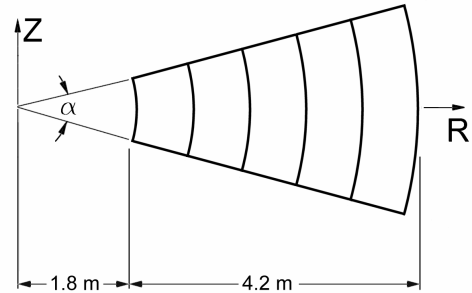


Figure VNF22: Problem sketch

Mode	Target	TRI3	QUAD4	TRI6	QUAD8	QUAD9
1	369.91	370.72 (0.2%)	370.18 (0.1%)	369.75 (0.0%)	369.26(-0.2%)	369.74 (0.0%)
2	838.03	833.25 (-0.6%)	832.15(-0.7%)	832.20(-0.7%)	823.15(-1.8%)	834.20(-0.5%)
3	1451.2	1422.7 (-2.0%)	1422.1 (-2.0%)	1438.6 (-0.9%)	1413.8 (-2.6%)	1443.7 (-0.5%)
4	2117.0	2032.1 (-4.0%)	2031.7 (-4.0%)	2090.5 (-1.3%)	2027.2 (-4.2%)	2098.6 (-0.9%)
5	2795.8	2606.0 (-6.8%)	2605.6 (-6.8%)	2737.3 (-2.1%)	2574.9 (-7.9%)	2731.6 (-2.3%)

Table VNF22-1: Summary of natural frequencies (Hz) – lumped mass matrix

Mode	Target	TRI3	QUAD4	TRI6	QUAD8	QUAD9
1	369.91	371.01 (0.3%)	370.34 (0.1%)	370.02 (0.0%)	370.01 (0.0%)	370.01 (0.0%)
2	838.03	842.85 (0.6%)	839.85 (0.2%)	838.10 (0.0%)	838.08 (0.0%)	838.08 (0.0%)
3	1451.2	1475.1 (1.6%)	1471.3 (1.4%)	1453.2 (0.1%)	1453.0 (0.1%)	1453.0 (0.1%)
4	2117.0	2194.6 (3.7%)	2189.9 (3.4%)	2132.1 (0.7%)	2131.7 (0.7%)	2131.7 (0.7%)
5	2795.8	2978.4 (6.5%)	2972.7 (6.3%)	2853.4 (2.1%)	2852.8 (2.0%)	2852.7 (2.0%)

Table VNF22-2: Summary of natural frequencies (Hz) – consistent mass matrix

## VNF23: Deep Simply Supported 'Solid' Beam

Source: Reference 1 (Test 51)  
 Elements: Brick elements  
 Attributes: Node restraint in UCS  
 Keywords: Orientation, 'solid' beam

The natural frequencies of a 'solid' beam are determined. An arbitrary orientation is set for the beam for testing purposes.

### Material data:

Young's modulus  $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$   
 Mass density  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$

### Mesh data:

High order elements:  $5 \times 1 \times 1$  (as shown)  
 Low order elements:  $10 \times 1 \times 3$

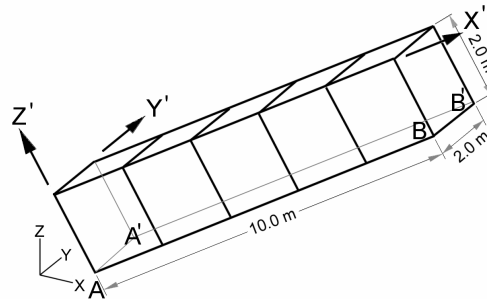


Figure VNF23: Problem sketch

### Boundary support conditions:

$D_{X'} = D_{Z'} = 0$  along line  $AA'$   
 $D_{Z'} = 0$  along line  $BB'$   
 $D_{Y'} = 0$  at all nodes on the plane  $Y' = 2.0 \text{ m}$

Mode	Target	TETRA4	PYRA5	WEDGE6	HEXA8
1	38.200	48.033 (22.1%)	41.275 (8.0%)	40.347 (23.8%)	37.964 (-0.6%)
2	85.210	97.112 (13.5%)	89.292 (4.8%)	87.822 (14.8%)	83.407 (-2.1%)
3	152.23	177.07 (14.8%)	162.90 (6.9%)	159.06 (17.3%)	152.84 (0.2%)
4	245.53	286.46 (15.0%)	268.76 (9.5%)	261.13 (16.5%)	251.76 (2.5%)
5	297.05	315.36 (7.3%)	302.45 (1.8%)	297.80 (7.8%)	288.20 (-3.0%)

Table VNF23-1: Summary of natural frequencies (Hz) – low order elements with lumped mass matrix

Mode	Target	TETRA10	PYRA13	WEDGE15	HEXA16	HEXA20
1	38.200	38.437 (-0.2%)	39.530 (3.5%)	38.439 (-0.7%)	38.501 (0.8%)	37.788 (-1.1%)
2	85.210	88.042 (3.6%)	90.751 (6.5%)	88.048 (4.5%)	88.082 (3.4%)	87.027 (2.1%)
3	152.23	155.85 (3.2%)	159.61 (4.8%)	154.01 (1.4%)	156.20 (2.6%)	150.53 (-1.1%)
4	245.53	263.22 (6.7%)	267.16 (8.8%)	256.39 (4.2%)	259.76 (5.8%)	243.09 (-1.0%)
5	297.05	297.11 (1.9%)	297.88 (0.3%)	287.57 (-3.3%)	297.03 (0.0%)	281.22 (-5.3%)

Table VNF23-2: Summary of natural frequencies (Hz) – high order elements with lumped mass matrix

Mode	Target	TETRA4	PYRA5	WEDGE6	HEXA8
1	38.200	48.033 (22.1%)	41.494 (8.6%)	40.678 (24.7%)	38.282 (0.2%)
2	85.210	97.112 (13.5%)	89.639 (5.2%)	88.332 (15.5%)	83.977 (-1.4%)
3	152.23	177.07 (14.8%)	166.01 (9.0%)	163.50 (20.6%)	157.63 (3.5%)
4	245.53	286.46 (15.0%)	276.32 (12.5%)	272.44 (20.6%)	265.01 (7.9%)
5	297.05	315.36 (7.3%)	308.97 (4.0%)	305.92 (12.7%)	298.43 (0.5%)

Table VNF23-3: Summary of natural frequencies (Hz) – low order elements with consistent mass matrix

Mode	Target	TETRA10	PYRA13	WEDGE15	HEXA16	HEXA20
1	38.200	38.525 (0.6%)	39.922 (4.5%)	38.637 (1.0%)	38.669 (1.2%)	38.268 (0.2%)
2	85.210	88.368 (3.6%)	91.236 (7.1%)	88.949 (4.7%)	88.048 (3.3%)	87.659 (2.9%)
3	152.23	157.48 (5.0%)	164.50 (8.1%)	158.49 (5.9%)	158.28 (4.0%)	157.49 (3.5%)
4	245.53	266.92 (8.0%)	276.18 (12.5%)	269.26 (9.5%)	259.85 (5.8%)	259.00 (5.8%)
5	297.05	299.42 (4.5%)	312.20 (5.1%)	300.57 (5.6%)	307.34 (3.5%)	306.01 (3.5%)

Table VNF23-4: Summary of natural frequencies (Hz) – high order elements with consistent mass matrix



## VNF24: Simply Supported 'Solid' Square Plate

Source: Reference 1 (Test 52)

Elements: Brick elements

Keywords: 'Solid' plate, eigenvalue shift, kinematically incomplete compression

A square thick plate is analysed. The plate is supported at the lower surface along the four edges in the Z direction only. As the plate can freely move in the XY plane, it has three rigid body modes. Therefore, in addition to testing the solid elements for natural frequency analysis, this problem also tests the solver's ability to treat kinematically incomplete suppression.

Material data:

Young's modulus  $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$

Poisson's ratio  $\nu = 0.3$

Mass density  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$

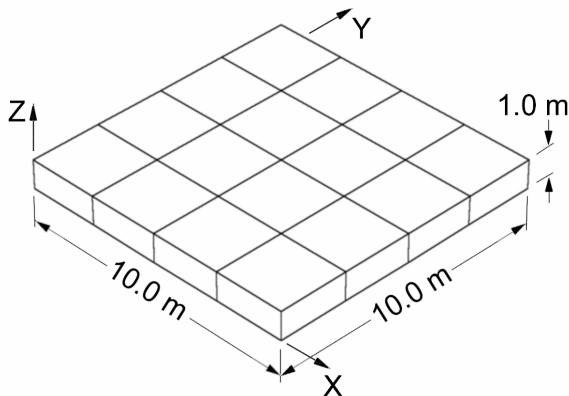


Figure VNF24: Problem sketch

Mesh data:

High order elements:  $4 \times 4 \times 1$  (as shown)

Low order elements:  $8 \times 8 \times 3$

Mode	Target	TETRA4		PYRA5		WEDGE6		HEXA8	
4	45.897	74.323	(61.9%)	66.868	(45.7%)	59.194	(29.0%)	44.115	(-3.9%)
5	109.44	163.85	(49.7%)	153.90	(40.6%)	132.39	(21.0%)	106.72	(-2.5%)
6	109.44	180.24	(64.7%)	153.90	(40.6%)	143.62	(31.2%)	106.72	(-2.5%)
7	167.89	194.52	(15.9%)	242.72*	(44.6%)	194.48	(15.8%)	156.47	(-6.8%)
8	193.59	206.29	(6.6%)	195.11*	(0.8%)	206.01	(6.4%)	193.58	(0.0%)
9	206.19	207.85	(0.8%)	206.40*	(0.1%)	207.20	(0.5%)	200.14	(-2.9%)
10	206.19	220.69	(7.0%)	206.40*	(0.1%)	207.25	(0.5%)	200.14	(-2.9%)

Table VNF24-1: Summary of natural frequencies (Hz) – low order elements with lumped mass matrix

\* The order in which these modes are listed is different to that which the solver calculates. The modes have been ordered according to mode shape.

Mode	Target	TETRA10		PYRA13		WEDGE15		HEXA16		HEXA20	
4	45.897	46.650	(1.6%)	53.206	(15.9%)	45.516	(-0.8%)	48.864	(6.5%)	44.502	(-3.0%)
5	109.44	114.50	(4.6%)	135.58	(23.9%)	109.30	(-0.1%)	116.30	(6.3%)	107.95	(-1.4%)
6	109.44	119.28	(9.0%)	135.58	(23.9%)	112.36	(2.7%)	116.30	(6.3%)	107.95	(-1.4%)
7	167.89	183.43	(9.3%)	194.51	(15.9%)	168.38	(0.3%)	172.04	(2.5%)	161.44	(-3.8%)
8	193.59	194.50	(0.5%)	195.97	(1.2%)	182.23	(-5.9%)	194.81	(0.6%)	193.16	(-0.2%)
9	206.19	195.39	(-5.2%)	196.18	(-4.9%)	193.24	(-6.3%)	195.32	(-5.3%)	185.59	(-10.0%)
10	206.19	202.40	(-1.8%)	196.18	(-4.9%)	195.80	(-5.0%)	195.32	(-5.3%)	185.59	(-10.0%)

Table VNF24-2: Summary of natural frequencies (Hz) – high order elements with lumped mass matrix

Mode	Target	TETRA4		PYRA5		WEDGE6		HEXA8	
4	45.897	74.323	(61.9%)	68.036	(48.2%)	60.740	(32.3%)	45.318	(-1.3%)
5	109.44	163.85	(49.7%)	160.53	(46.7%)	139.65	(27.6%)	113.96	(4.1%)
6	109.44	180.24	(64.7%)	160.53	(46.7%)	154.10	(40.8%)	113.96	(4.1%)
7	167.89	194.52	(15.9%)	259.03*	(54.3%)	197.57	(17.7%)	173.30	(3.2%)
8	193.59	206.29	(6.6%)	197.16*	(1.8%)	213.46	(10.3%)	196.77	(1.6%)
9	206.19	207.85	(0.8%)	212.57*	(3.1%)	218.12	(5.8%)	209.56	(1.6%)
10	206.19	220.69	(7.0%)	212.57*	(3.1%)	224.21	(8.7%)	209.56	(1.6%)

Table VNF24-3: Summary of natural frequencies (Hz) – low order elements with consistent mass matrix

Mode	Target	TETRA10		PYRA13		WEDGE15		HEXA16		HEXA20	
4	45.897	46.876	(2.1%)	54.310	(18.3%)	45.891	(0.0%)	49.677	(8.2%)	44.796	(-2.4%)
5	109.44	116.11	(6.1%)	143.19	(30.8%)	112.19	(2.5%)	121.35	(10.9%)	110.54	(1.0%)
6	109.44	121.78	(11.3%)	143.19	(30.8%)	116.42	(6.4%)	121.35	(10.9%)	110.54	(1.0%)
7	167.89	189.55	(12.9%)	215.58*	(28.4%)	179.97	(7.2%)	185.37	(10.4%)	169.10	(0.7%)
8	193.59	194.26	(0.3%)	196.69*	(1.6%)	194.11	(0.3%)	193.98	(0.2%)	193.92	(0.2%)
9	206.19	206.83	(0.3%)	209.81*	(1.8%)	206.70	(0.2%)	206.73	(0.3%)	206.64	(0.2%)
10	206.19	207.35	(0.6%)	209.81*	(1.8%)	207.29	(0.5%)	206.73	(0.3%)	206.64	(0.2%)

Table VNF24-4: Summary of natural frequencies (Hz) – high order elements with consistent mass matrix

\* The order in which these modes are listed is different to that which the solver calculates. The modes have been ordered according to mode shape.

## VNF25: Simply Supported Solid Annular Plate - Axisymmetric Vibration

Source: Reference 1 (Test 53)  
 Elements: Brick elements and sector-symmetry link  
 Attributes: Node restraint in UCS  
 Keywords: Axisymmetric vibration mode

A sector of a simply supported thick annular plate is modelled with brick elements. All hoop displacements are fixed to model axisymmetric vibration. Z displacements at all nodes along AA are fixed, and nodes at the same R and Z are constrained to have the same Z displacement.

Material data:

Young's modulus  $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$

Poisson's ratio  $\nu = 0.3$

Mass density  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$

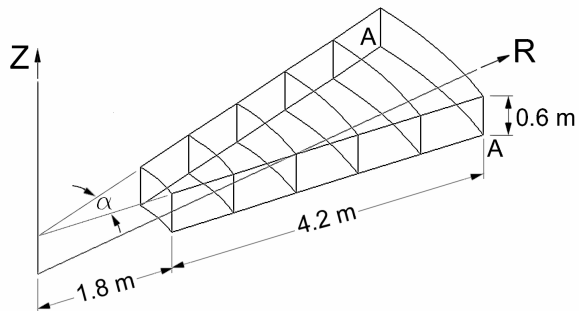


Figure VNF25: Problem sketch

Mesh data:

High order elements:  $5 \times 1 \times 1$ ,  $\alpha = 10^\circ$  (as shown)

Low order elements:  $15 \times 1 \times 4$ ,  $\alpha = 5^\circ$

Mode	Target	TETRA4	PYRA5	WEDGE6	HEXA8
1	18.583	22.545 (21.3%)	19.676 (5.9%)	19.643 (5.7%)	18.578 (0.0%)
2	140.15	166.38 (18.7%)	146.38 (4.4%)	144.84 (3.3%)	138.90 (-0.9%)
3	224.16	224.61 (0.2%)	222.48 (-0.7%)	224.59 (0.2%)	224.20 (0.0%)
4	358.29	428.37 (19.6%)	382.35 (6.7%)	376.43 (5.1%)	362.06 (1.1%)
5	629.19	688.45 (9.4%)	680.85 (8.2%)	668.20 (6.2%)	644.20 (2.4%)

Table VNF25-1: Summary of natural frequencies (Hz) – low order elements with lumped mass matrix

Mode	Target	TETRA10	PYRA13	WEDGE15	HEXA16	HEXA20
1	18.583	18.711 (0.7%)	19.494 (4.9%)	18.418 (-0.9%)	20.066 (8.0%)	18.363 (-1.2%)
2	140.15	140.25 (0.1%)	145.61 (3.9%)	134.76 (-3.8%)	143.04 (2.1%)	133.52 (-4.7%)
3	224.16	224.11 (0.0%)	224.07 (0.0%)	223.88 (-0.1%)	223.99 (-0.1%)	223.72 (-0.2%)
4	358.29	373.69 (4.3%)	382.62 (6.8%)	347.78 (-2.9%)	363.66 (1.5%)	342.61 (-4.4%)
5	629.19	684.31 (8.8%)	681.01 (8.2%)	618.91 (-1.6%)	637.91 (1.4%)	607.35 (-3.5%)

Table VNF25-2: Summary of natural frequencies (Hz) – high order elements with lumped mass matrix

Mode	Target	TETRA4		PYRA5		WEDGE6		HEXA8	
1	18.583	22.545	(21.3%)	19.699	(6.0%)	19.681	(5.9%)	18.606	(0.1%)
2	140.15	166.38	(18.7%)	147.50	(5.2%)	146.59	(4.6%)	140.49	(0.2%)
3	224.16	224.61	(0.2%)	222.57	(-0.7%)	224.74	(0.3%)	224.35	(0.1%)
4	358.29	428.37	(19.6%)	389.30	(8.7%)	387.07	(8.0%)	372.07	(3.8%)
5	629.19	688.45	(9.4%)	687.51	(9.3%)	690.93	(9.8%)	674.72	(7.2%)

Table VNF25-3: Summary of natural frequencies (Hz) – low order elements with consistent mass matrix

Mode	Target	TETRA10		PYRA13		WEDGE15		HEXA16		HEXA20	
1	18.583	18.798	(1.2%)	19.621	(5.6%)	18.596	(0.1%)	20.343	(9.5%)	18.582	(<0.1%)
2	140.15	143.31	(2.3%)	150.72	(7.5%)	140.57	(0.3%)	152.03	(8.5%)	140.56	(0.3%)
3	224.16	224.20	(0.0%)	224.25	(0.0%)	224.18	(0.0%)	224.19	(0.0%)	224.18	(0.0%)
4	358.29	389.01	(8.6%)	408.35	(14.0%)	374.05	(4.4%)	404.57	(12.9%)	374.05	(4.4%)
5	629.19	688.65	(9.5%)	689.26	(9.5%)	686.07	(9.0%)	688.9	(9.5%)	686.04	(9.0%)

Table VNF25-4: Summary of natural frequencies (Hz) – high order elements with consistent mass matrix

## VNF26: Badly Conditioned Cantilever Beam

Source: Reference 1 (Test 71)  
 Elements: Beam element  
 Keywords: Ill-conditioned stiffness matrix

This problem is used to test the capability of the eigenvalue solver to handle an ill-conditioned stiffness matrix. Four meshes are considered:

- (i)  $a = b$ , uniform 8 elements
- (ii)  $a = 10b$ , element length ratio is 10
- (iii)  $a = 100b$ , element length ratio is 100
- (iv)  $b = 0$ , uniform 4 elements

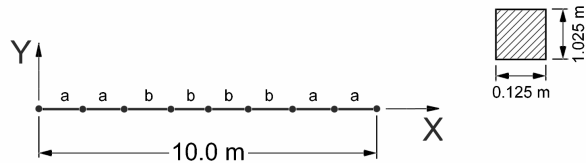


Figure VNF26: Problem sketch

Material data:

Young's modulus  $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$   
 Mass density  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$

Mode	Target	a = b		a = 10b		a = 100b		b = 0	
1	1.010	1.002	(-0.8%)	0.989	(-2.1%)	0.9824	(-2.7%)	0.9815	(-2.8%)
2	6.327	6.174	(-2.4%)	5.764	(-8.9%)	5.766	(-8.9%)	5.769	(-8.8%)
3	17.716	17.022	(-3.9%)	16.266	(-8.2%)	15.396	(-13.1%)	15.277	(-13.8%)
4	34.717	32.820	(-5.5%)	26.461	(-23.8%)	26.439	(-23.8%)	26.628	(-23.3%)
5	57.390	53.236	(-7.2%)	79.285	(38.2%)	124.222	(116%)	124.198	(116%)
6	85.730	77.195	(-10.0%)	124.395	(45.1%)	354.225	(313%)	353.687	(313%)

Table VNF26-1: Summary of natural frequencies (Hz) – lumped mass matrix

Mode	Target	a = b		a = 10b		a = 100b		b = 0	
1	1.010	1.010	(0.0%)	1.010	(0.0%)	1.010	(0.0%)	1.010	(0.0%)
2	6.327	6.326	(≤0.1%)	6.330	(0.0%)	6.333	(0.1%)	6.333	(0.1%)
3	17.716	17.718	(≤0.1%)	17.814	(0.6%)	17.842	(0.7%)	17.844	(0.7%)
4	34.717	34.762	(0.1%)	34.938	(0.6%)	35.140	(1.2%)	35.188	(1.4%)
5	57.390	57.636	(0.4%)	60.731	(5.8%)	64.805	(12.9%)	65.406	(14.0%)
6	85.730	86.560	(1.0%)	101.765	(18.7%)	104.730	(22.2%)	104.950	(22.4%)

Table VNF26-2: Summary of natural frequencies (Hz) – consistent mass matrix

As the element length ratio increases ( $a/b=1, 10, 100$ ) the solution accuracy decreases. The third mesh, despite being very much ill-conditioned, still gives better results than the fourth mesh.

## VNF27: Lateral Vibration of a Stretched Circular Membrane

Source: Analytical solution from Reference 2 (Example 2, page 699-701)  
 Elements: 3D membrane and plate/shell elements, sector symmetry link  
 Keywords: Lateral vibration, stretched, stiffening effect, multiple freedom sets

A circular thin aluminium membrane is stretched due to a change in temperature. Its lowest four natural frequencies are determined.

Material data:

Young's modulus  $E = 69 \times 10^9 \text{ Pa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.334$   
 Mass density  $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$   
 Thermal expansion coefficient  $\alpha = 2.38 \times 10^{-5}$

Geometry data:

Radius  $R = 1.0 \text{ m}$   
 Thickness  $t = 0.001 \text{ m}$

Load data:

A temperature change of  $-10^\circ\text{C}$

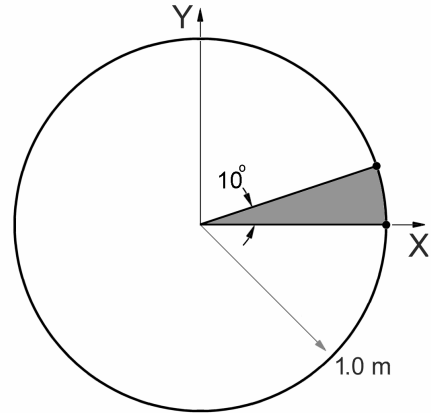


Figure VNF27: Problem sketch

This problem is used to test the solver's ability to include the existing stress stiffening effect in natural frequency analysis. For a stretched circular membrane, the natural frequencies are given by

$$\omega_i = \frac{\gamma_i a}{R} \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

where  $R$  is the radius,  $\gamma_i$  is the  $i$ -th root of the Bessel equation of order zero  $J_0(\gamma) = 0$  (see Table VNF27-1), and

$$a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

in which  $T$  is the stress value, and  $\rho$  is the mass density.

$i$	$\gamma_i$
1	2.40483
2	5.52008
3	11.79153
4	14.93092

Table VNF27-1: Roots of  $J_0(\gamma) = 0$

Three meshes are used:

Mesh 1: 10 degree sector of the plate modelled with eight 3D membrane elements equally spaced in the radial direction: seven 9-node elements and one 6-node element. Sector symmetry links are used to force the nodes with the same radius to have the same lateral displacement. Node restraint in a cylindrical UCS is used to restrain the node not to move in the hoop direction.

Mesh 2: Same as Mesh 1 except that plate shell elements are used.

Mesh 3: A section is modelled with 16 9-node axisymmetric elements equally spaced in the radial direction.

The linear static solver must be run before the natural frequency solver to establish the stress distribution. When setting up the natural frequency solution, the initial condition must be selected to include the stiffening effect of the stretching stress. For the mesh with 3D membrane elements, two sets of freedom conditions are defined: one for linear static analysis and the other for the natural frequency analysis. In the freedom conditions for the linear static analysis, the out-of-plane displacement component is fixed for all nodes to avoid singularity.

Consistent mass matrices are used for this test problem.

Mode	Target	Mesh 1 3D membrane	Mesh 2 Shell9 Mesh	Mesh 3 Axisymmetric
1	36.5762	36.576 (0.0%)	36.598 (0.1%)	36.597 (0.1%)
2	83.9375	83.966 (0.0%)	84.286 (0.2%)	84.281 (0.4%)
3	131.6187	131.709 (0.1%)	132.974 (1.0%)	132.920 (1.0%)
4	179.3429	179.775 (0.2%)	183.010 (2.0%)	182.743 (1.9%)

Table VNF27-2: Summary of natural frequencies (Hz)

When there is no initial stress in the membrane, the 3D membrane model is singular and the model does not have any lateral stiffness. For the other two, the natural frequency results are much lower than the case when the stretching stress is considered.

Mode	Mesh 1 3D membrane	Mesh 2 Shell9 Mesh	Mesh 3 Axisymmetric
1	-	1.225	1.229
2	-	7.292	7.364
3	-	18.149	18.504
4	-	33.889	34.910

Table VNF27-3: Natural frequencies (Hz) without initial stress

## VNF28: Lateral Vibration of a Stretched String

Source: Analytical solution from Reference 2 (page 631- 635)

Elements: Truss and spring elements

Keywords: Lateral vibration, stretched, stiffening effect

A stainless steel string is fixed at the two ends with a pre-tension of 100 N. The first four natural frequencies are determined and compared with analytical solutions.

Material data:

Young's modulus  $E = 197 \times 10^9 \text{ Pa}$

Mass density  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$

Geometry data:

Length  $L = 1.0 \text{ m}$

Section diameter  $D = 1.0 \text{ mm}$

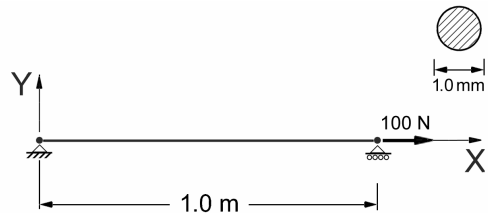


Figure VNF28: Problem sketch

The analytical solution for a string is

$$\omega_i = \frac{ia}{L} \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

where  $L$  is the string length, and  $a$  is defined as

$$a = \sqrt{T/(\rho A)}$$

in which  $T$  is the axial force,  $\rho$  is the mass density, and  $A$  is the area of cross section.

Two models are considered: one with 20 truss elements of equal length; another with 20 spring elements of equal length. The linear static solver is run first to provide the initial conditions for the natural frequency solver.

Mode	Analytical	Straus7	
1	63.8819	63.8162	(-0.1%)
2	127.7638	127.2390	(-0.4%)
3	191.6457	189.8773	(-0.9%)
4	255.5276	251.3450	(-1.6%)

Table VNF28: Natural frequencies (Hz)



## VNF29: Torsional Vibration of a Shaft With Three Disks

---

Source:	Reference 3 (Problem 22 page 127)
Elements	Spring/damper element
Attribute	Point rotational mass

---

The natural frequencies of the shaft with three disks shown are determined.

Model data:

$$\text{Torsional stiffness} \quad K = 10 \times 10^6 \text{ in} \cdot \text{lb/rad}$$

$$\text{Mass moment of inertia} \quad J = 10^3 \text{ in} \cdot \text{lb} \cdot \text{sec}^2 / \text{rad}$$

Node rotational masses are used to model the disks, and spring elements are used for the shaft. Note that the only active displacement component is the rotation about the Y axis.

The results listed in the table are exact to the last digit shown.

Mode	Circular Frequency (rad/sec)	Natural frequency (Hz)
1	45.7635865	7.2835010
2	100.000000	15.9154943
3	133.812160	21.2968667

Table VNF29: Summary of results

An exact solution to this problem can be derived as follows.

The eigenvalue problem can be written as

$$\left( K \begin{bmatrix} 1 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 4 \end{bmatrix} - \omega^2 J \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Introducing  $\lambda = \omega^2 J / K$ , we have the characteristic equation

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\lambda & 0 \\ -\lambda & 2-2\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 4-4\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(8\lambda^2 - 16\lambda + 3) = 0$$

which has the following three roots:

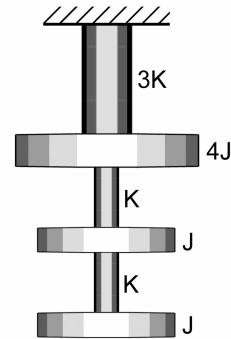


Figure VNF29: Problem sketch

$$\lambda_1 = \frac{4 - \sqrt{10}}{4}, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = \frac{4 + \sqrt{10}}{4}.$$

Then, the circular frequencies can be expressed in term of these  $\lambda$  values:

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_i \frac{K}{J}} = 100\sqrt{\lambda_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

and the natural frequencies

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} = \frac{100}{2\pi} \sqrt{\lambda_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

# VNF30: Cantilever With Balanced Off-Centre Point Masses

Source:	Reference 1 (Test4)
Elements:	Beam element
Attribute:	Point translational and rotational masses

The first six natural frequencies of the cantilever shown in Figure VNF30 are determined. The cantilever has two off-centre point masses of 10000 kg each at the free end. Both are at a distance of 2.0 m from the beam centroid.

This test is a modified version of Test 4 in Reference 1, in which two different masses are attached to the beam. To model the two point masses, both translational and rotational masses are applied to the node at the free end of the cantilever. The translational part is the direct summation of the two masses:

$$M_x = M_y = M_z = 2M = 20000\text{ kg}$$

and components for the rotational part are

$$\begin{aligned}RM_x &= 2M \times 2^2 = 80000\text{ kg}\cdot\text{m}^2 \\RM_y &= 2M \times 0^2 = 0\text{ kg}\cdot\text{m}^2 \\RM_z &= 2M \times 2^2 = 80000\text{ kg}\cdot\text{m}^2\end{aligned}$$

Frequency results for the first 6 free vibration modes are given. This test problem is also solved with a different model in which rigid-links are used to connect the point masses to the beam. Solutions with these two models are identical.

Mode	1	2	3	4	5	6
Frequency	1.3517	1.4020	3.8619	8.0577	15.9918	25.1806

Table VNF30: Summary of frequency results (Hz)

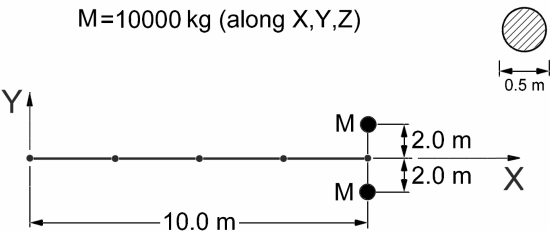


Figure VNF30: Cantilever with balanced off-centre point masses

## VNF31: Natural Frequency of a Motor Generator

Source: Reference 4 (VM48)  
 Elements: Pipe element  
 Attribute: Point rotational masses

A small generator is driven off a main engine through a solid steel shaft. It is assumed that the shaft is fixed at one end and the mass of the shaft is negligible. The natural frequency in torsion is determined.

Material data:

Young's modulus  $E = 31.2 \times 10^6 \text{ psi}$   
 Density  $\rho = 0.0$   
 Poisson's Ration  $\nu = 0.3$   
 Polar moment of inertia  $J = 11.96875 \text{ lb-in}^2$

Geometry data:

Length  $L = 8.0 \text{ in}$   
 External diameter  $d = 0.375 \text{ in}$   
 Thickness  $t = 0.1875 \text{ in}$

Frequency results are summarised in Table VNF31.

	Target	Straus7
Frequency (Hz)	48.7806	48.7806

Table VNF31: Summary of frequency results (Hz)

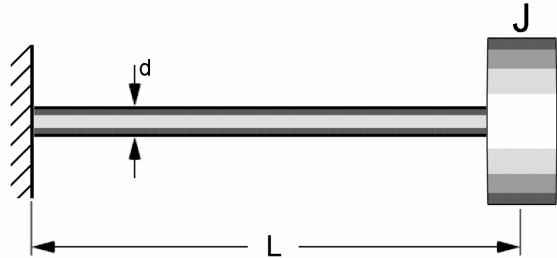


Figure VNF31: A Motor-generator system

# VNF32: Torsional Frequencies of a Drill Pipe

Source:	Reference 4 (VM57)
Elements:	Normal beam and pipe elements
Attribute:	Point rotational masses

An oil-well drill pipe is fixed at the upper end and has a collar at the lower end. Its first two frequencies are determined.

Material data:	
Young's modulus	$E = 4.4928 \times 10^9 \text{ lb/ft}^2$
Poisson's ratio	$\nu = 0.3$
Density	$\rho = 15.2174 \text{ lb-sec}^2/\text{ft}^4$
Polar moment of inertia	$J = 29.3 \text{ lb-ft-sec}^2$

Geometry data:	
Length	$L = 5000.0 \text{ ft}$
External diameter	$d = 0.375 \text{ ft}$
Thickness	$t = 0.027916 \text{ ft}$

Normal beam and pipe elements are used to model the drill pipe in two different meshes. In each mesh, 12 beam elements are used. Frequency results are summarised in Table VNF32. Note that to include the contribution of the beam elements to the global mass matrix, the consistent mass matrix has been used.

	Target	Straus7
Mode 1	0.3833	0.3834 (0.03%)
Mode 2	1.260	1.264 (0.32%)

Table VNF32: Summary of frequency results (Hz)

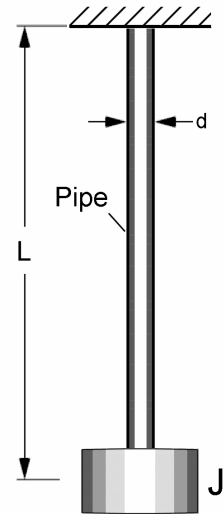


Figure VNF32: A Motor-generator system

## VNF33: Cantilever Beam on an Elastic Support

Source:	Reference 5 (Section 18-3)
Elements:	Normal beam element
Attribute:	Beam support

The first three natural frequencies of the cantilever beam on an elastic support are determined.

Material data:

Young's modulus for the beam	$E = 2.1 \times 10^{10} \text{ Pa}$
Modulus of support	$k = 1.0 \times 10^7 \text{ N/m}^3$
Beam support constant	$k_s = k \cdot b = 1.0 \times 10^7 \text{ Pa}$
Density	$\rho = 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
Linear density	$m = \rho \cdot h \cdot b = 2.0 \times 10^3 \text{ kg/m}$



Figure VNF33: A cantilever with distributed support

Geometry data:

Beam length	$L = 28 \text{ m}$
Height of beam cross-section	$h = 2.0 \text{ m}$
Width of beam cross section	$b = 1.0 \text{ m}$

The analytical solution (Page 388, Reference 5) is

$$\omega_i = \left[ (bL)_i^4 \frac{EI}{mL^4} + \frac{k_s}{m} \right]^{1/2}$$

in which, values of  $(bL)_i$  are given in Table VNF33-1.

Mode $i$	$(bL)_i$
1	1.875
2	4.694
3	7.855

Table VNF33-1: Values of  $(bL)_i$

Six beam elements are used to model the cantilever. Frequency results are summarised in Table VNF33-2.

Mode	Analytical	Straus7
1	11.41	11.40 (-0.09%)
2	16.33	16.22 (-0.67%)
3	35.00	34.45 (-1.57%)

Table VNF33-2: Summary of frequency results (Hz)

## References

1. F. Abbassian, D.J. Dawswell and N.C. Knowles, *Selected Benchmarks for Natural Frequency Analysis*, NAFEMS Report SBNFA, Glasgow, November, 1987.
2. C. H. Edwards, Jr and D. E. Penney, *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems* (3<sup>rd</sup> edition), Prentice-Hall, N.J. 1993.
3. W. W. Seto, *Theory and Problems of Mechanical Vibrations*, McGraw-Hill, N.Y., 1964.
4. *ANSYS Verification Manual*, Swanson Analysis Systems, Inc. 1993.
5. R. W. Clough and J. Penzien, *Dynamics of Structures* (2<sup>nd</sup> edition), McGraw-Hill, 1993.

## CHAPTER 5

# Harmonic Response





# VHR1: Deep Simply Supported Beam Under Distributed Load

Source: Reference 1 (Test 5H)  
 Elements: Beam element  
 Keywords: Peak value, transverse shear deformation, and Timoshenko beam

A deep simply supported beam is under a harmonically varying distributed vertical force. The peak displacement and fibre stress are determined.

Material data:

Young's modulus  $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$   
 Mass density  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$   
 Damping ratio modal damping ratio of 2%  
 for all the 16 modes used

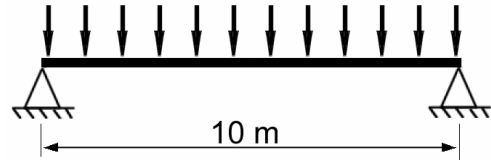


Figure VHR1: Problem sketch

Geometry data:

Beam length  $10 \text{ m}$   
 Beam cross-section  $2.0 \text{ m} \times 2.0 \text{ m}$  square

Mesh data:

10 thick beam elements of equal length

Load data:

Load magnitude  $F_0 = 10^6 \text{ N/m}$   
 Frequency range 0 to 60 Hz

The first 16 natural frequencies and corresponding mode shapes are determined by running the natural frequency solver. These modes are used in the harmonic response solution. The maximum response values are summarised in Table VHR1.

	Reference solution	Straus7	
Frequency ( $\text{Hz}$ )	42.65	42.62	(-0.07%)
Peak displacement ( $\text{mm}$ )	13.45	13.51	(0.45%)
Peak Stress ( $\text{N/mm}^2$ )	241.9	244.3	(0.99%)

Table VHR1: Summary of results

## VHR2: Simply Supported Thin Square Plate

Source: Reference 1 (Test 13H)  
 Elements: Plate/shell element  
 Keywords: Square plate, thin plate

The square plate shown is simply supported at the four edges, and all the in-plane displacements are fixed. The maximum deflection at the plate centre is determined.

Material data:

Young's modulus  $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$   
 Mass density  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$   
 Damping ratio modal damping ratio of 2%  
 for each of the 16 modes used

Boundary support conditions:

$D_z = \theta_y = 0$  along lines  $X = 0$  and  $X = 10$

$D_z = \theta_x = 0$  along lines  $Y = 0$  and  $Y = 10$

Mesh data:

$4 \times 4$  QUAD8 elements

Load data:

Uniform pressure  $P_0 = 100 \text{ N/mm}^2$   
 Frequency range 0 to 4.16 Hz

The first 16 natural frequencies and corresponding mode shapes are determined by running the natural frequency solver. These modes are used in the harmonic response solution. The maximum response values are summarised in Table VHR2.

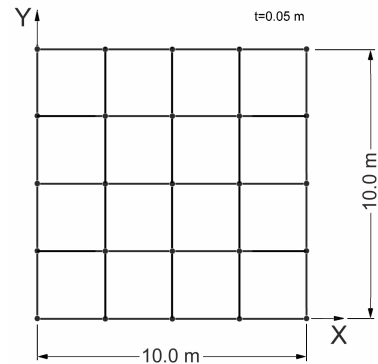


Figure VHR2-1: Problem sketch

	Target solution	Straus7	
Frequency (Hz)	2.377	2.384	(0.29%)
Peak displacement (mm)	45.42	45.39	(-0.07%)
Peak Stress (N/mm <sup>2</sup> )	35.08	35.07	(-0.03%)

Table VHR2: Summary of results

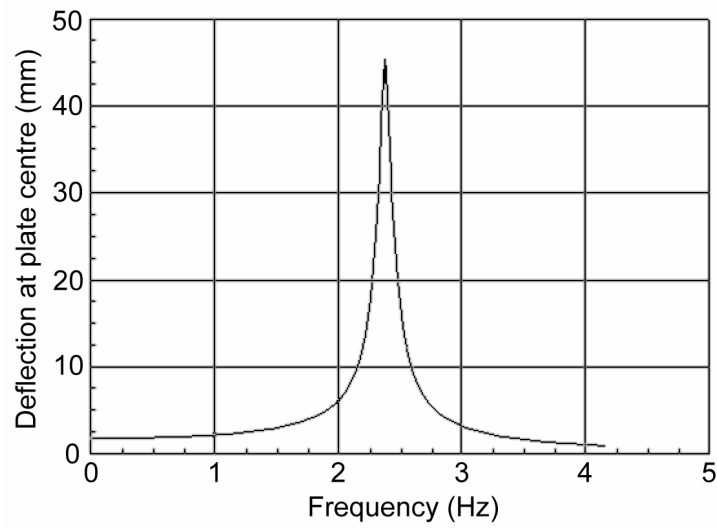


Figure VHR2-2: Variation of deflection at the plate centre

## VHR3: Simply Supported Thick Square Plate

Source: Reference 1 (Test 21H)  
 Elements: Plate/shell element  
 Keywords: Transverse shear deformation

The simply supported square plate is analysed. As the length to thickness ratio is 10, transverse shear effects should be considered. The simply supported condition is modelled by enforcing both the lateral deflection and the rotation about the normal to the boundary to be zero.

Material data:

Young's modulus	$E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$
Poisson's ratio	$\nu = 0.3$
Mass density	$\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$
Damping ratio	modal damping of 2% for each of the 16 modes used

Load data:

Load magnitude	$P_0 = 10^6 \text{ N/m}^2$
Frequency range	0 to 78.17 Hz

Mesh data:

4 × 4 QUAD8 elements

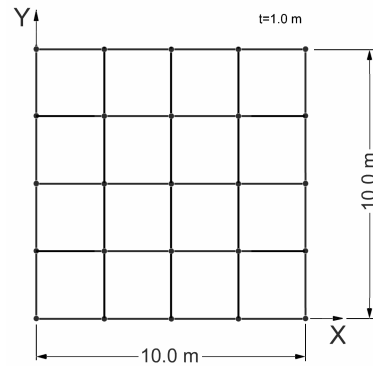


Figure VHR3-1: Problem sketch

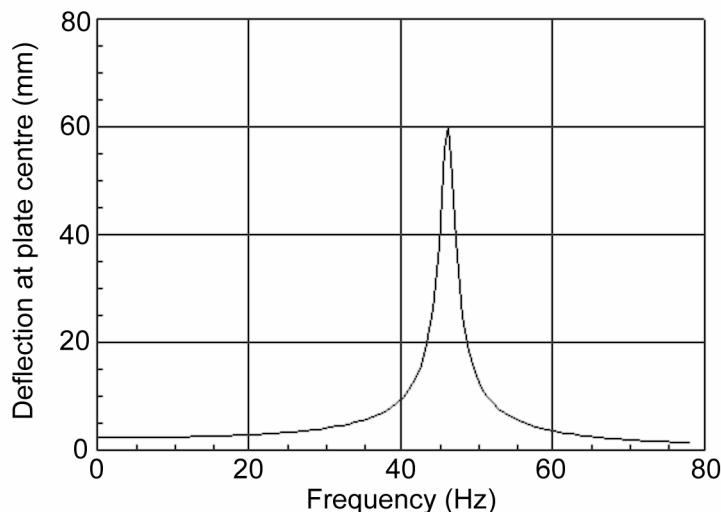


Figure VHR3-2: Variation of deflection at the plate centre

The first 16 natural frequencies and corresponding mode shapes are determined by running the natural frequency solver. These modes are used in the harmonic response solution. The maximum response values are summarised in Table VHR3.

	Target	Straus7	
Frequency (Hz)	46.04	46.17	(0.28%)
Peak displacement (mm)	60.02	60.05	(0.05%)
Peak Stress (N/mm <sup>2</sup> )	881.8	882.9	(0.12%)

Table VHR3-3: Summary of results

# VHR4: Spring Mass System

Source: Reference 2 (VM 183)  
 Elements: Spring element  
 Attribute: Point mass  
 Keywords: Analytical solution, spring-mass system

The spring-mass system shown is under harmonic load  $F(t)$ . The natural frequencies and displacement response for the frequency range of 0.1 to 1.0 Hz are determined.

Model data:

Stiffness of spring 1  $K_1 = 6 \text{ N/m}$   
 Stiffness of spring 2  $K_2 = 16 \text{ N/m}$   
 Mass values  $M_1 = M_2 = 2 \text{ kg}$   
 Load magnitude  $F_0 = 50 \text{ N}$   
 Damping Ignored

Two spring elements and two point mass attributes are used in this model. As the model is a discrete system with two degrees of freedom, the natural frequency results should be exact. For the harmonic response analysis, the numerical solution should also be exact if all frequency modes are included.

For both analyses, Straus7 gives exact results.

Mode	$\omega$ (radian/sec)	Frequency (Hz)	Mode shape
1	$\sqrt{2}$	0.225079	$Y_1 = 3Y_2$
2	$2\sqrt{3}$	0.551329	$Y_2 = -3Y_1$

Table VHR4-1: Natural frequencies and mode shapes of the spring-mass system

Table VHR4-2 presents the numerical results for the displacements of masses 1 and 2 for the frequency range 0.1 to 1.0 Hz in 51 steps. The frequency increment is  $(1.0-0.1)/50=0.018$ . In addition to the 51 frequency steps defined with this increment, three extra steps are introduced for each of the natural frequencies. Two extra points are inserted at the half-power points and another at the natural frequency. As damping is ignored for this test, a modal damping value of 0.5% is used for locating the half-power points.

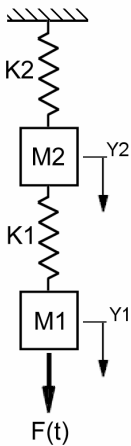


Figure VHR4-1: Problem sketch

Frequency (Hz)	Component	Target	Straus7
0.226	Y1	-1371.7	-1371.7
	Y2	-458.08	-458.08
0.910	Y1	-0.8539	-0.8539
	Y2	0.1181	0.1181

Table VHR4-2: Harmonic response results

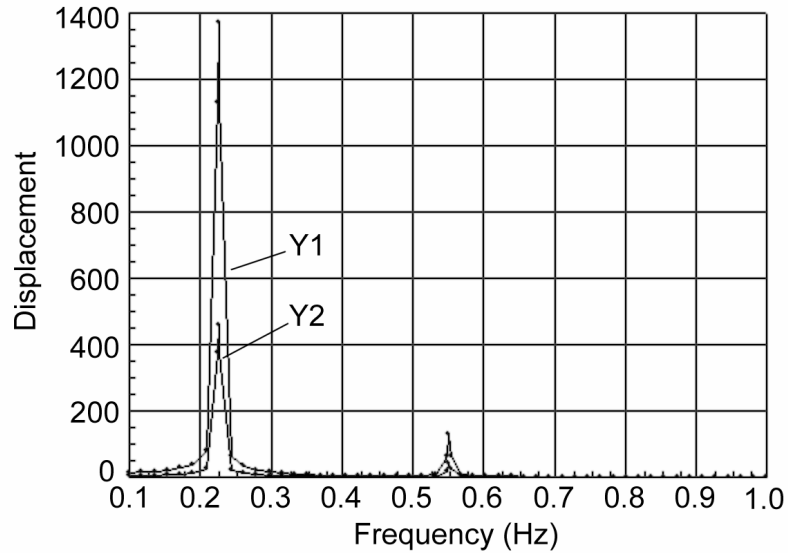


Figure VHR4-2: Variation of node displacement amplitudes



## VHR5: Harmonic Response of a Simply Supported Beam

Source: Reference 3 (Section 3.5)

Elements: Beam element

A simply supported beam is subjected to harmonic point force as shown. The deflection at the mid-span is determined for frequencies up to 1455.82 Hz.

Material data:

Young's modulus	$E = 210 \times 10^9 \text{ Pa}$
Mass density	$\rho = 7640 \text{ kg/m}^3$
Damping ratio	$\xi = 0.5\%$ (for all modes)

Geometry data:

Cross-section area	$A = 4.0 \times 10^{-3} \text{ m}^2$
Moment of inertia	$I = 2.0 \times 10^{-5} \text{ m}^4$
Beam length	$L = 2.0 \text{ m}$

Load data:

Unit amplitude point force is applied at the quarter point from the left end of the beam. The frequency range is from zero to twelve times of the fundamental natural frequency.

A mesh with twenty uniform beam elements is used.

First of all, the lowest ten vibration modes of the beam are determined, and the frequency results are summarised in Table VHR5-1. Excellent agreement is achieved. Note that the analytical solution for the angular frequencies is

$$\omega_i = i^2 \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

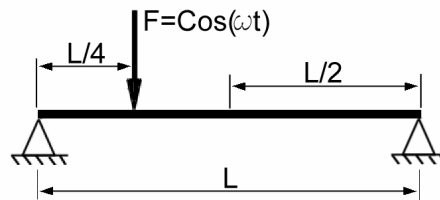


Figure VHR5-1: Problem sketch

Mode	Analytical	Straus7	
1	145.582	145.582	(0.00%)
2	582.328	582.324	(0.00%)
3	1310.239	1310.191	(0.00%)
4	2329.313	2329.036	(-0.01%)
5	3639.551	3638.441	(-0.03%)
6	5240.954	5237.429	(-0.07%)
7	7133.521	7123.977	(-0.13%)
8	9317.252	9294.211	(-0.25%)
9	11792.147	11741.117	(-0.43%)
10	14558.206	14452.526	(-0.73%)

Table VHR5-1: Summary of the natural frequency results (Hz)

With the ten free vibration modes, the steady state response is determined. 97 steps are used so that frequency steps at  $\omega_1$ ,  $4\omega_1$  and  $9\omega_1$  are considered in the solution. The deflections at the mid-span and the load point are summarised in Table VHR5-2 and Figure VHR5-2.

$\omega/\omega_1$	Mid-span		Load point	
	Theory <sup>[3]</sup>	Straus7	Theory <sup>[3]</sup>	Straus7
1	141.4	141.4	100	100
4	—	0.118	12.5	12.5
9	1.746	1.746	1.235	1.236

Table VHR5-2: Summary of deflection results

ωω

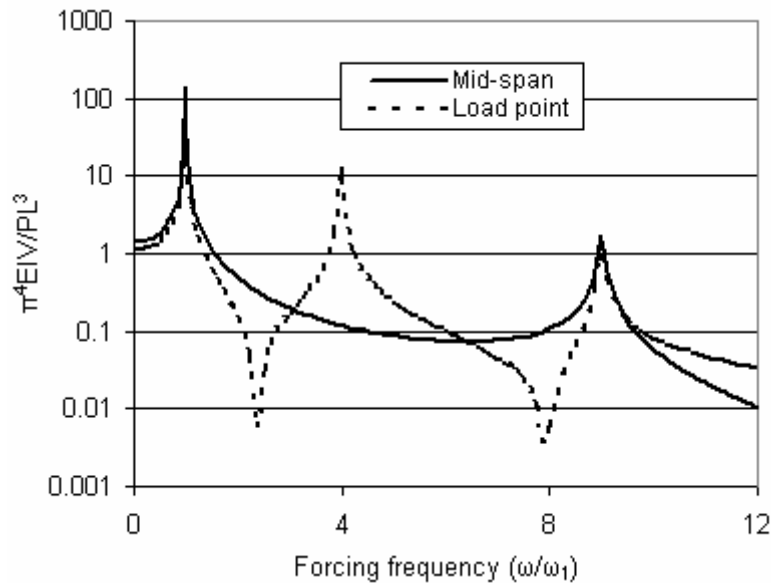


Figure VHR5-2: Magnitudes of deflections ( $V$ ) at the mid span and load point

## References

1. J. Maguire, D. J. Dawswell and L. Gould, *Selected Benchmarks for Forced Vibration*, NAFEMS (R0016), Glasgow, U.K.1990.
2. *ANSYS Verification Manual*, Swanson Analysis Systems, Inc. 1993.
3. G. B. Warburton, *The Dynamical Behaviour of Structures* (2<sup>nd</sup> edition), Pergamon, Oxford, 1976.

## CHAPTER 6

# Spectral Response



# VSR1: Seismic Response of a Simply Supported Beam

Source: Reference 1 (Article 6.4)  
 Elements: Beam element  
 Keywords: Base excitation, maximum deflection, response spectrum

A simply supported beam is subjected to vertical motion of both supports. The motion is described by a constant seismic displacement response spectrum given by Table VSR1-1. The maximum deflection at the mid-span is determined.



Figure VSR1: Simply supported beam

Material data:

Young's modulus  $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$   
 Mass density  $\rho = 0.00073 \text{ lb} \cdot \text{sec}^2/\text{in}^4$

Geometry data:

Length  $L = 240 \text{ in}$   
 Cross section area  $A = 273.9726 \text{ in}^2$   
 Moment of inertia  $I = 333.33 \text{ in}^4$

Frequency ( $\text{Hz}$ )	Displacement response ( $\text{in}$ )
0.1	0.44
10.0	0.44

Table VSR1-1: Response spectrum

The lumped mass matrix is used in the natural frequency analysis and only the first vibration mode is considered in the spectral response solution.

Solution	Target	Straus7
Displacement at mid-span ( $\text{in}$ )	0.5600	0.5556 (-0.79%)

Table VSR1-2: Displacement at mid-span

# VSR2: Earthquake Response of a Three Storey Building

Source: Reference 2 (Problem P14)  
 Elements: Spring/damper element  
 Attribute: Point mass  
 Keywords: Base excitation, maximum deflection, earthquake, response spectrum

A shear-type building model subjected to horizontal ground motion is analysed. The displacement responses are determined.

Model data:

Mass  $M_1 = 1.0 \times 10^5 \text{ kg}$   
 $M_2 = 1.5 \times 10^5 \text{ kg}$   
 $M_3 = 2.0 \times 10^5 \text{ kg}$   
 Stiffness  $K_1 = 1.0 \times 10^7 \text{ N/m}$   
 $K_2 = 2.0 \times 10^7 \text{ N/m}$   
 $K_3 = 3.0 \times 10^7 \text{ N/m}$

Load data:

Response spectral curve given in  
 Figure VSR2-2

Three spring elements are used to model the lateral stiffness characteristics, and the element lengths are arbitrarily set to 1.0. The spring lateral stiffness is set according to the shear stiffness specified in the figure, and the axial stiffness has no effect on the analysis results.

The only active degrees of freedom considered are the three horizontal displacements of the point masses and therefore the total number of degrees of freedom is three. All three free vibration modes are determined in the natural frequency analysis are used in the spectral analysis solution. The Square Root of Sum of the Square (SRSS) method is used to combine the modal responses.



Figure VSR2-1: A three story building

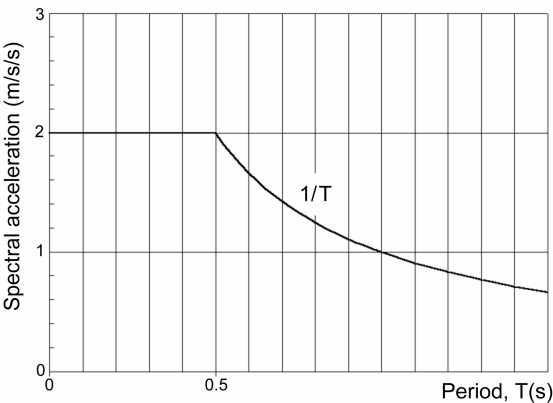


Figure VSR2-2: Acceleration spectrum

Mass	Target	Straus7
1	0.0384	0.0388 (1.0%)
2	0.0249	0.0251 (0.8%)
3	0.0124	0.0124 (0.0%)

Table VSR 2: Displacement results (m)

# VSR3: Earthquake Response of a Simple Frame

Source: Reference 3 (Example E26-5)  
 Elements: Beam element  
 Attribute: Point mass  
 Keywords: Base excitation, maximum deflection, earthquake, response spectrum

The frame in Figure VSR3-1 is subjected to an earthquake described with the acceleration response spectrum in Table VSR3-1. The maximum response forces when the peak acceleration is 0.3g are determined.

Model data:

Mass  $M = 0.01 \text{ kips-sec}^2/\text{ft}$   
 Stiffness  $K = EI/L^3 = 1 \text{ kips/ft}$

Firstly the natural frequency solver is used to determine the first two natural frequencies. The two frequencies are 0.8742 Hz and 2.6827 Hz, respectively.

The spectral response solver uses the two modes to calculate the modal response. The maximum response is calculated using the SRSS method.

To be consistent with Reference 3, the Straus7 result for the horizontal response force is obtained by summing up the contributions from both masses.

Note that in Straus7, a direction vector of 9.66 has been used in X: this is equivalent to 0.3 times acceleration due to gravity in the system of units of the model.

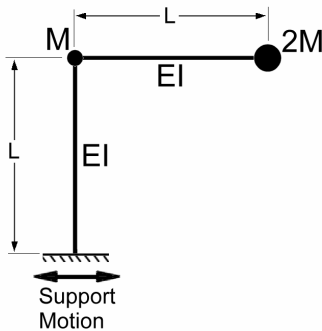


Figure VSR3: A frame subjected to earthquake action

Period (s)	Spectral acceleration
	Maximum ground acceleration
0	1.0
0.15	2.5
0.4	2.5
0.43	2.35
0.64	1.62
0.75	1.38
0.875	1.16
1.147	0.92
1.37	0.77
1.75	0.54
2.056	0.47
2.5	0.37
3	0.333

Table VSR3-1: Acceleration spectral curve

	Analytical [3]	Straus7
Horizontal response force	0.570	0.5690 (-0.2%)
Vertical response force	0.260	0.2607 (0.3%)

Table VSR3-2: Maximum response force results (kip)



# VSR4: Antenna Subjected to Wind Load

Source:	Reference 4 (Problem 13-35)
Elements:	Spring/damper element
Attributes:	Point mass
Keywords:	Wind load, power spectral density, standard deviation value

An antenna dish is subjected to wind loads with a given power spectral density. It is known that the first frequency of the system is 4 Hz, and the damping ratio is assumed to be  $\zeta=0.05$ . The vibration magnitude is determined.

A spring element is used to model the support structure and its lateral stiffness is determined based on the known frequency. Because the angular frequency can be expressed as

$$\omega = \sqrt{k / M} = 2\pi f = 8\pi$$

the spring lateral stiffness is

$$k_L = (8\pi)^2 M = 64\pi^2 \cdot 60 = 3840\pi^2 = 37899.3 (N / m)$$

Material data:

Spring lateral stiffness	$k_L = 37899.3 \text{ N/m}$
Spring axial stiffness	$k_A = 1.0 \times 10^{10} \text{ N/m}$
Point mass	$M = 60 \text{ Kg}$

Boundary support conditions:

At the base	All components fixed
At the top	All components except DX fixed

Load:

Wind load in X direction with power spectral density given in Table VSR4-1.

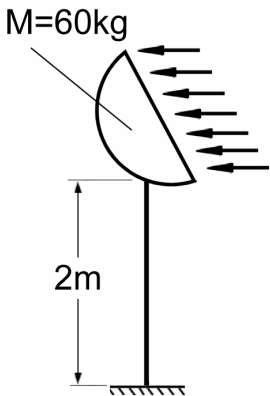


Figure VSR4: Antenna subjected to wind load

Frequency ( $H\tilde{z}$ )	Power Spectral Density ( $N^2/H\tilde{z}$ )
0	$100 \times 10^3$
25	$100 \times 10^3$

Table VSR4-1: Power spectral density table

This is a single degree of freedom problem and the single mode is used in the spectral response analysis. The analytical solution for the displacement is the one standard deviation value, which is calculated with the following expression [4]

$$\sigma = \sqrt{\frac{Sf\pi}{k^2 4\zeta}}$$

Straus7 presents its spectral results in terms of one standard deviation values, and the displacement magnitude calculated is exactly the same as the analytical solution, as shown in Table VSR4-2.

	Analytical	Straus7
Displacement ( <i>m</i> )	0.066139	0.066139

Table VSR4-2: Displacement response

# VSR5: Column Under Base Excitation

---

Source:	Reference 3 (Example E26-2)
Elements:	Beam element
Keywords:	Base excitation, maximum deflection, earthquake, response spectrum

---

A cantilever column subjected to base motion is analysed. The spectral curve in Table VSR3-1 is used for the acceleration spectrum. The peak acceleration is 0.3g.

Model data:

Stiffness	$EI = 14 \times 10^5 \text{ kips} \cdot \text{ft}^2$
Linear mass density	$m = 0.02 \text{ kips} \cdot \text{sec}^2 / \text{ft}^2$
Damping ratio	$\xi = 5.0\%$ for all modes used
Length	$L = 100 \text{ ft}$
Number of elements	10 beams

The first ten free vibration modes are calculated and then used in the spectral response analysis.

In Reference 3, an assumed displacement shape is used in the analysis. Although the shape used there is different from the first free vibration mode, the results are very close.

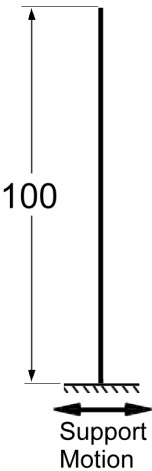


Figure VSR5: A cantilever column

Result	Reference 3	Straus7
Displacement response at the top (ft)	0.776	0.789 (1.7%)
Maximum base shear (kips)	5.27	5.31 (0.7%)

Table VSR5: Result summary for the first mode

## VSR6: Rigid Slab Subject to a Base Acceleration

Source: Reference 3 (Example E26-6)  
 Elements: Beam and plate/shell elements  
 Keywords: Base excitation, maximum deflection, response spectrum

A rigid slab is supported by three columns. It is assumed that the columns are rigidly attached to the foundation and the slab, so that the resistance to lateral displacement in any direction at the top of each column is  $12EI/L^3 = 5 \text{ kips/ft}$ . The torsional stiffness of the columns is ignored. The spectral curve in Table VSR3-1 is used for the acceleration spectrum and the peak acceleration is assumed to be  $0.3g$ .

Column property data:

Young's modulus  $E = 1 \times 10^6 \text{ lb/ft}^2$   
 Moment of area  $I_{11} = I_{22} = 0.213 \text{ ft}^4$   
 Cross section area  $A = 1.0 \text{ ft}^2$

Slab property data:

Young's modulus  $E = 1 \times 10^9 \text{ lb/ft}^2$   
 Mass density  $\rho = 15.625 \text{ lb sec}^2/\text{ft}^4$   
 Thickness  $t = 0.5 \text{ ft}$

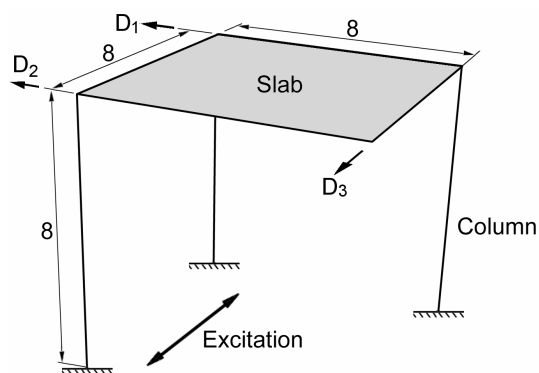


Figure VSR6: A rigid slab

The natural frequency solver is used to determine the first three natural frequencies with the consistent mass matrix. The three frequencies are  $0.8073 \text{ Hz}$ ,  $0.8717 \text{ Hz}$  and  $1.5937 \text{ Hz}$ .

The three vibration modes are used in the spectral response analysis, and the Square Root of Sum of the Square (SRSS) method is used to combine the modal responses.

	Reference 3	Straus7
Max response $D_1$	0.1758	0.1770 (0.7%)
Max response $D_2$	0.2745	0.2694 (-1.9%)
Max response $D_3$	0.2745	0.2694 (-1.9%)

Table VSR 6: Results summary (ft)

## References

1. J. M. Biggs, *Introduction to Structural Dynamics*, McGraw Hill, 1964.
2. A. H. Barbat and J. M. Canet, *Structural Response Computations in Earthquake Engineering*, Pineridge Press, Swansea, UK 1989.
3. R. W. Clough and J. Penzien, *Dynamics of Structures* (2<sup>nd</sup> edition), McGraw-Hill, 1993.
4. W. T. Thomson, *Theory of Vibration with Applications* (4<sup>th</sup> edition), Chapman & Hall, London, 1993.

## CHAPTER 7

# Linear Transient Dynamic



# VLT1: Deep Simply Supported Beam Under Distributed Load

Source:	Reference 1 (Test 5T)
Elements:	Beam element
Keywords:	Modal damping, Rayleigh damping, step load, transverse shear deformation, Timoshenko beam, peak value

A deep simply-supported beam is subjected to a suddenly applied step load. The peak displacement and fibre stress are determined.

Material data:

Young's modulus	$E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$
Poisson's ratio	$\nu = 0.3$
Mass density	$\rho = 8000 \text{ kg / m}^3$

Load data:

Suddenly applied distributed load over the beam  
 $q_0 = 10^6 \text{ N/m}$

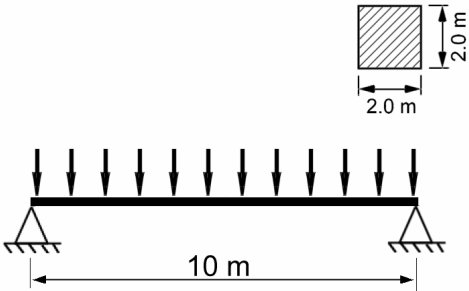


Figure VLT1-1: Simply supported beam

Model data:

Number of elements	10 beams
Modal damping	2% (for all the 16 modes used in mode superposition solution)
Rayleigh damping	Mass damping $\alpha = 5.36$ , and stiffness damping $\beta = 7.46 \times 10^{-5}$ (for direct integration)
Time step	0.0001 sec
Time period	2.0 sec

This problem is solved using both the direct integration and the modal superposition methods. The Newmark integration scheme is used. The variation of the deflection at the mid-span of the beam is illustrated in Figure VLT1-2.

		Reference solution	Straus7	
			Direct integration	Mode superposition
Peak displacement	Value (mm)	1.043	1.044 (0.1%)	1.043 (0.0%)
	Time (sec)	0.0117	0.0117	0.0117
Peak fibre stress (N/mm <sup>2</sup> )		18.76	18.52 (-0.9%)	18.54 (-1.2%)
Static displacement (mm)		0.538	0.537 (-0.2%)	-

Table VLT1: Summary of results



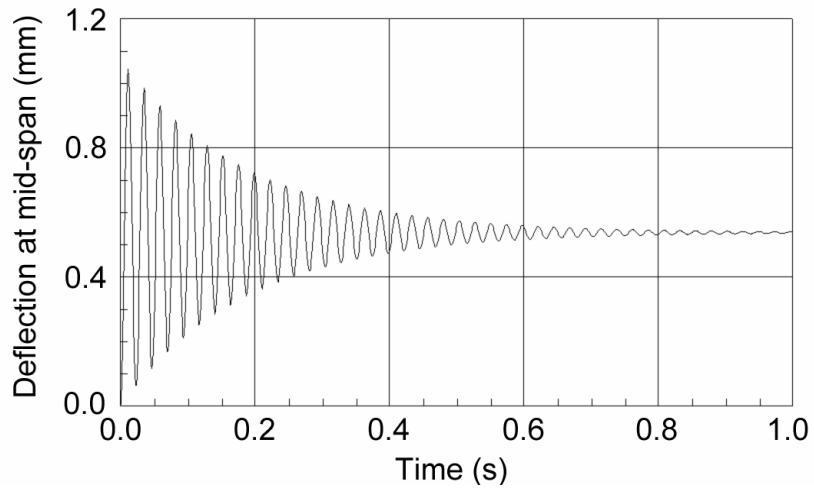


Figure VLT1-2: Variation of deflection at the mid-span of the beam

## VLT2: Simply Supported Thin Square Plate

Source: Reference 1 (Test 13T)  
 Elements: Plate/shell element  
 Keywords: Modal damping, Rayleigh damping, step load, peak value

The square plate shown is simply supported at the four edges, and all the in-plane displacements are fixed. A uniform pressure is suddenly applied over the whole plate. Peak responses are determined.

Material data:

Young's modulus  $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$   
 Mass density  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$

Load data:

Suddenly applied uniformly distributed load on plate  
 $P_0 = 100 \text{ N/m}^2$

Boundary support conditions:

$D_z = \theta_y = 0$  along lines  $X = 0$  and  $X = 10$   
 $D_z = \theta_x = 0$  along lines  $Y = 0$  and  $Y = 10$

Model data:

Damping ratio 2% (for all the 16 modes used in mode superposition solution)  
 Rayleigh damping Mass damping  $\alpha = 0.299$  and stiffness damping  $\beta = 1.339 \times 10^{-3}$  (for direct integration)  
 Time step 0.002 sec  
 Time period 2.0 sec

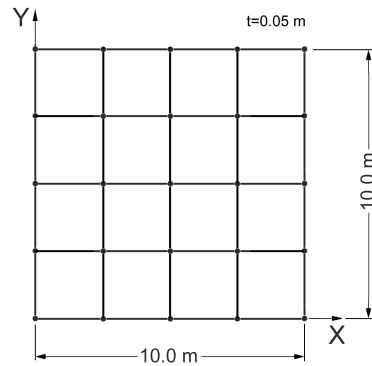


Figure VLT2: Simply supported plate

The Newmark scheme is used for time domain integration for both solutions presented in Table VLT2.

Result		Direct integration			Mode superposition	
		Target	Straus7		Target	Straus7
Peak displacement	Value (mm)	3.507	3.471	(-2.7%)	3.444	3.467 (0.7%)
	Time (sec)	0.216	0.214		0.210	0.218
Peak stress at the centre (N/mm <sup>2</sup> )		2.484	2.563	(3.2%)	2.411	2.598 (7.7%)
Static displacement (mm)		1.817	1.774	(-2.4%)	—	

Table VLT2: Summary of results

## VLT3: Simply Supported Thick Square Plate

Source: Reference 1 (Test 21T)  
 Elements: Plate/shell element  
 Keywords: Modal damping, Rayleigh damping, step load, transverse shear deformation, thick plate

The simply supported square plate is analysed. As the length to thickness ratio is 10, transverse shear should be included. The simply supported condition is modelled by enforcing both the lateral deflection and the rotation about the normal to the boundary to be zero.

Material data:

Young's modulus  $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$   
 Mass density  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$

Load data:

Suddenly applied uniformly distributed load on plate  $P_0 = 10^6 \text{ N/m}^2$

Model data:

Damping ratio 2% (for all the 16 modes used in mode superposition solution)  
 Rayleigh damping Mass damping  $\alpha = 5.772$  and stiffness damping  $\beta = 6.929 \times 10^{-5}$  (for direct integration)  
 Time step 0.0001 sec

Boundary support conditions:

$D_z = \theta_y = 0$  along lines  $X = 0$  and  $X = 10$   
 $D_z = \theta_x = 0$  along lines  $Y = 0$  and  $Y = 10$

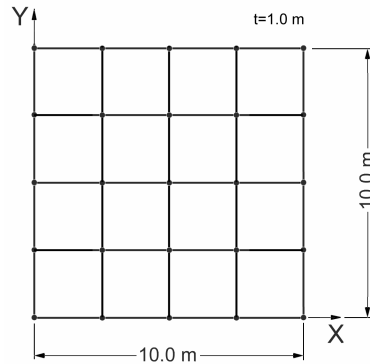


Figure VLT3: Simply supported thick plate

Result		Direct integration		Mode superposition	
		Target	Straus7	Target	Straus7
Peak displacement	Value (mm)	4.676	4.615 (-1.3%)	4.590	4.647 (1.2%)
	Time (sec)	0.0105	0.0108	0.0105	0.0109
Peak bending stress at the centre (N/mm <sup>2</sup> )		67.34	67.24 (-0.1%)	65.50	68.17 (1.25%)
Static displacement (mm)		2.331	2.309 (-0.9%)	—	

Table VLT3: Summary of results

# VLT4: Transient Response of Spring to a Step Excitation

Source: Reference 2 (VM75)  
Elements: Beam, spring/damper elements  
Attribute: Node translational mass  
Keywords: Step load, peak value

A mass supported on a spring is subjected to a step force  $F$ . The critical damping ratios ( $\xi$ ) are 0.0 and 0.5. The maximum displacement for the undamped case ( $\xi=0.0$ ) and the displacements at  $t = 0.20$  seconds for both the undamped and damped cases are determined.

Three models, as described in Figure VLT4-1 are used in this test:

- Model 1: Normal beam element with cross-section area  $A = 1 \text{ in}^2$  and Young's modulus  $E = 2400 \text{ lb/in}^2$ ;
- Model 2: Spring/damper element with axial stiffness  $= 200 \text{ lb/in}$  and axial damping  $= 0$ ;
- Model 3: Spring/damper element with axial stiffness  $= 200 \text{ lb/in}$  and axial damping  $= 10 \text{ lb}\cdot\text{sec/in}$  (corresponding to a damping ratio of 0.5).

Other model data:

- Point mass  $M = 0.5 \text{ lb}\cdot\text{sec}^2/\text{in}$   
Force magnitude  $F = 200 \text{ lb}$

The time stepping used is presented in Table VLT4-1.

No. of Steps	TimeStep (secs)	Save Every....
82	0.0025	1

Table VLT4-1: Time stepping setup

As Model 1 and Model 2 simulate the same physical situation, they are expected to produce the same results. This test confirms that the results from the two models are the same.

Target Values	Reference 2	Straus7
2.0000	1.9992	1.9995 (0.015%)

Table VLT4-2: Maximum displacement results for the case of  $\xi = 0.0$  at Time = 0.1575 sec

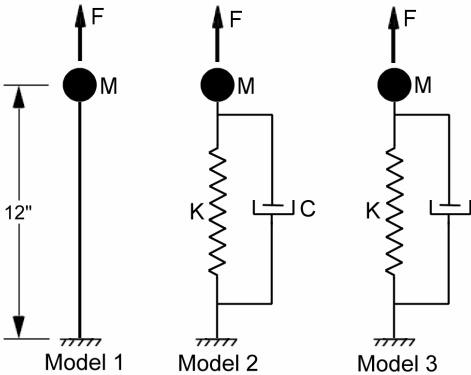


Figure VLT4-1: Spring systems

	Target Values	Reference 2	Straus7
No damping	1.6536	1.6723	1.6728 (0.03%)
Damping ratio = 0.5	1.1531	1.1544	1.1544 (0.00%)

Table VLT4-3: Deflection results at Time = 0.20 sec

A plot of displacement vs time for both the damped and undamped cases is presented in Figure VLT4-2

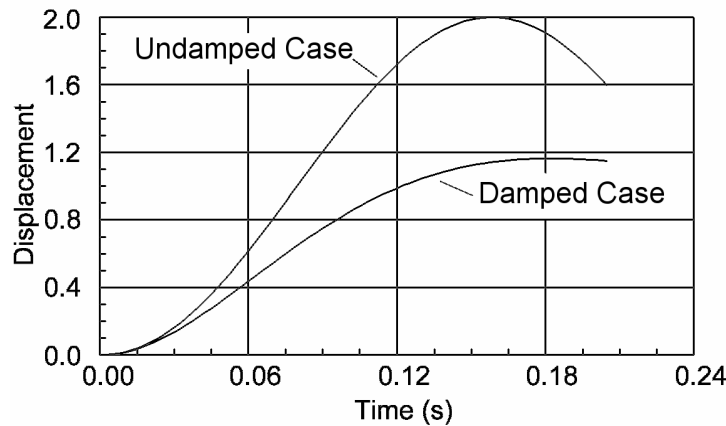


Figure VLT4-2: Plot of displacement vs time

## VLT5: Response of a Cantilever Beam to an Impulse

Source: Reference 3 (Page 136)  
 Elements: Beam element  
 Keyword: Impulse load

A cantilever is subjected to an impulse load as shown in Figure VLT5-1. The tip deflection and the maximum fibre stress at the support are determined.

The half sine wave in the load table is defined with twenty points using the equation tool and the transient solution is obtained with 80 time steps of 0.5ms (= 0.0005 sec) and 20 saved steps (i.e. Save every 4).

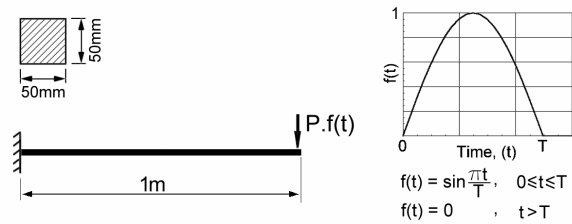


Figure VLT5-1: Model data

Material data:

Young's modulus  $E = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.0$   
 Mass density  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$

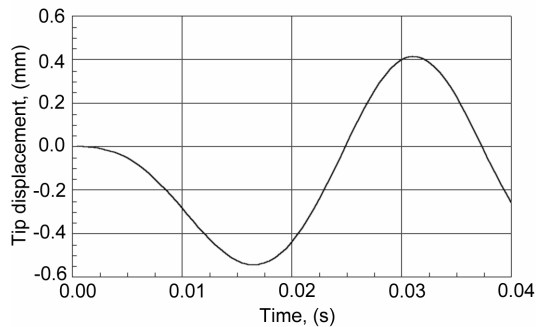


Figure VLT5-2: Tip deflection

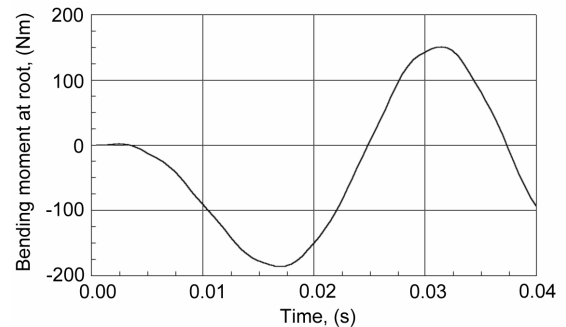


Figure VLT5-3: Maximum fibre stress at root

The first four free vibration modes are determined by the natural frequency solver, and then used in the linear transient solution with mode superposition. It is assumed that damping effects are negligible. The results are presented in Figures VLT5-2 and VLT5-3, which agree well with the solution in Reference 3.

## VLT6: Displacement Propagation Along a Bar With Free Ends

Source: Reference 2 (Problem VM84)  
 Elements: Beam element  
 Keywords: Propagation, step load, Wilson  $\theta$  method, Newmark  $\beta$  method

A 48000 *in* long steel bar is subjected to a suddenly applied force  $F$  at the right end. The bar is free to move in the X-direction and all the other displacement components are fixed. The displacement of the right end at  $t = T/2 = 0.23969$  seconds, is determined. Note that  $T$  is the fundamental period of vibration and is equal to 0.47937 seconds.

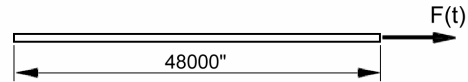


Figure VLT6: Bar under tension

### Material data:

Young's modulus  $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$   
 Mass density  $\rho = 0.0007202 \text{ lb} \cdot \text{sec}^2 / \text{in}^4$

### Geometry data:

Length  $L = 48,000 \text{ in}$   
 Cross section area  $A = 2 \text{ in}^2$

### Mesh data:

16 beam elements of the same length are used  
 The active degree of freedom is globally set to be DX only  
 The left end is fully fixed

### Load data:

A suddenly applied step load at the right end with a magnitude of  $F_0 = 6000 \text{ lb}$

The time stepping setup used is shown in Table VLT6-1. No damping is applied. Both Wilson  $\theta$  and Newmark  $\beta$  methods are used to solve this problem.

Steps	Step Size	Save Every.....
48	0.47937/96	1

Table VLT6-1: Time stepping

Method	Theory	Reference 2	Straus7	
			Newmark Method	Wilson Method
Displacement	4.8000	4.8404	4.8319 (0.66%)	4.8109 (0.23%)

Table VLT6-2: Result summary for displacement at the right end at  $t = 0.23969 \text{ sec}$

## References

1. J. Maguire, D. J. Dawswell and L. Gould, *Selected Benchmarks for Forced Vibration*, NAFEMS (R0016), Glasgow, U.K. 1990.
2. *ANSYS Verification Manual*, Swanson Analysis Systems, Inc. 1993.
3. G. B. Warburton, *The Dynamical Behaviour of Structures* (2<sup>nd</sup> edition), Pergamon, Oxford, 1976.





## CHAPTER 8

# Nonlinear Transient Dynamic



# VNT1: Shallow Spherical Cap With a Concentrated Apex Load

Source: Reference 1 (Section 8.6.5)

Elements: QUAD4 shell element

Keywords: Step load, shallow spherical cap, geometric nonlinearity, large deflection

A thin shallow dome is clamped around its edge, and has a concentrated load (step load) applied at the apex as shown in Figure VNT1-1. The displacement response at the apex of the dome as a function of time is determined.

Material data:

Young's modulus  $E = 10 \times 10^6 \text{ psi}$   
 Poisson's ratio  $\nu = 0.3$   
 Mass density  $\rho = 2.45 \times 10^{-4} \text{ lb} \cdot \text{sec}^2 / \text{in}^4$

Geometry data:

Radius  $R = 4.75 \text{ in}$   
 Thickness  $t = 0.01576 \text{ in}$

Load data:

Step load with a magnitude of  $P_0 = 100 \text{ lb}$  at the centre of the cap

A quarter of the cap is modelled with 27 QUAD4 plate elements using symmetry restraints. This nonlinear transient analysis is carried out with both the geometry nonlinear and include [Kg] options set. Damping is not included. The time stepping set up is listed in Table VNT1.

Steps	Timestep (secs)	Save Every.....
200	$2.0 \times 10^{-6}$	1

Table VNT1: Time stepping setup

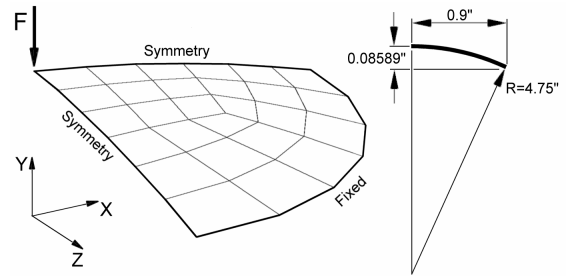


Figure VNT1-1: Shallow spherical cap

A graph of the DY displacement at the apex vs the time is presented in Figure VNT1-2. These results agree well with those shown in Figure 8.6.5(b) of Reference 1.

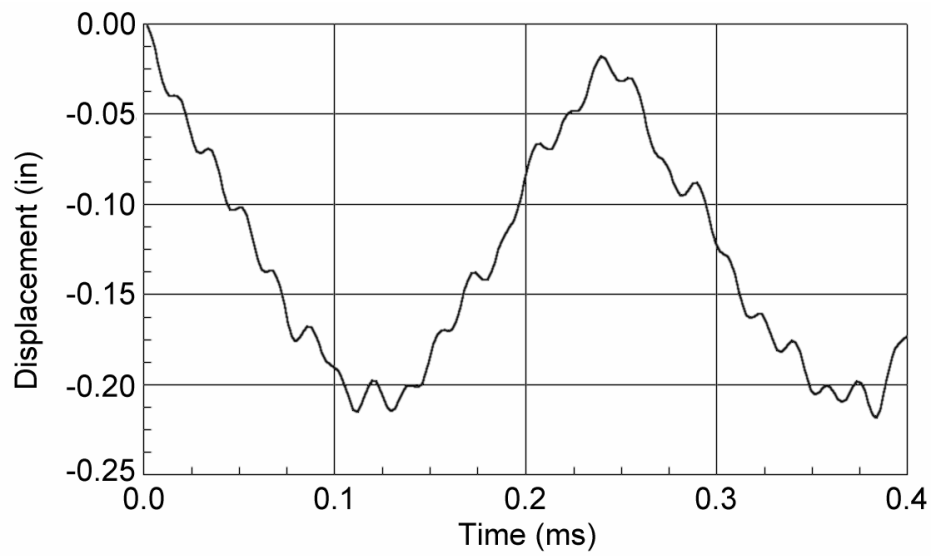


Figure VNT1-2: Apex displacement response

## VNT2: Weight Bouncing on an Elastic Platform

Source: Reference 1 (Section 8.6.4)  
 Elements: Spring/damper, normal and zero gap elements  
 Keywords: Contact analysis

A 4 lb weight (i.e. 0.01036 lb mass) is resting on a spring-supported platform as shown in Figure VNT2-1. The platform spring is initially compressed a distance of 4 inches. The platform is then released, which results in the platform moving a distance of 2 inches before being halted by a stopper. The motion of the block and platform as a function of time is plotted and compared with the graph shown in Figure 8.6.4 (b) of Reference 1.

This problem is modelled with a spring, a normal gap and a zero gap element. A pre-tension of  $-40\text{ lb}$  is applied to the spring element to simulate the initial compression of 4 inches.

Material data:

Spring stiffness  $K = 10\text{ lb/in}$   
 Spring pre-tension  $T_0 = -40\text{ lb}$   
 Gap initial stiffness  $K_a = 2500\text{ lb/in}$

Load data:

Gravity acceleration  $G = -386.088\text{ in/sec}^2$

The nonlinearity is related to the use of contact elements and therefore neither material nor geometry nonlinearity needs to be set in the solution setup. To better simulate the state of contact between the platform and stopper a smaller time step is used in the early stage of the solution, as shown in Table VNT2.

Steps	Timestep (secs)	Save Every.....
50	0.001	10
110	0.005	2

Table VNT2: Time stepping setup

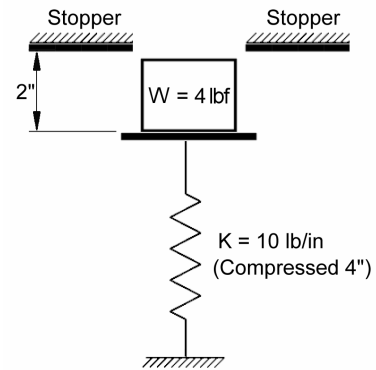


Figure VNT2-1: A bouncing weight

The results for displacements of the platform and the point mass agree well with the theoretical solution.

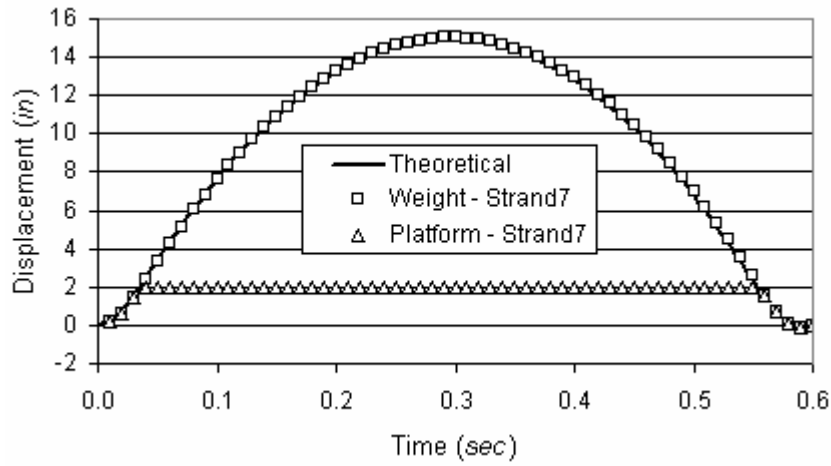


Figure VNT 2-2: Displacement results

# VNT3: Simply Supported Beam with Restrained Motion

Source: Reference 1 (Section 9.6.3)  
Elements: Beam and zero gap elements  
Keywords: Contact analysis

A simply supported elastic beam of the dimensions shown in Figure VNT3-1 has a single cycle sinusoidal force applied at its quarter span. A stopper is present underneath the centre of the beam with a clearance of 0.02 inches.

Material data:

Young’s modulus  $E = 10 \times 10^6 \text{ psi}$   
Poisson’s ratio  $\nu = 0.3$   
Mass density  $\rho = 7.764 \times 10^{-4} \text{ lb} \cdot \text{sec}/\text{in}^4$

Geometry data:

Cross section area  $A = 0.314 \text{ in}^2$   
Moment of inertia  $I = 0.157 \text{ in}^4$

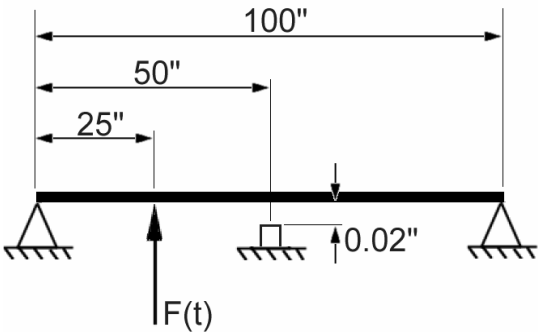


Figure VNT3-1: Simply support beam

The beam is modelled with 20 equal-length beam elements.

As the only nonlinearity considered is due to the gap, neither the geometric nor the material nonlinearity option is selected. No damping is applied. Table VNT3 describes the time steps.

Steps	Timestep (sec)	Save Every....
800	$5 \times 10^{-5}$	4

Table VNT3: Time stepping setup



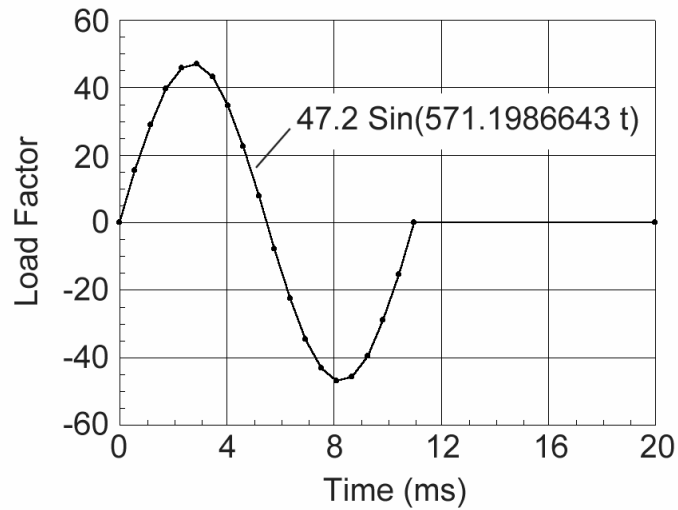


Figure VNT3-2: Load history

Figure VNT3-3 shows the history of deflection at the loading point, which compares well with the one presented in the Reference.

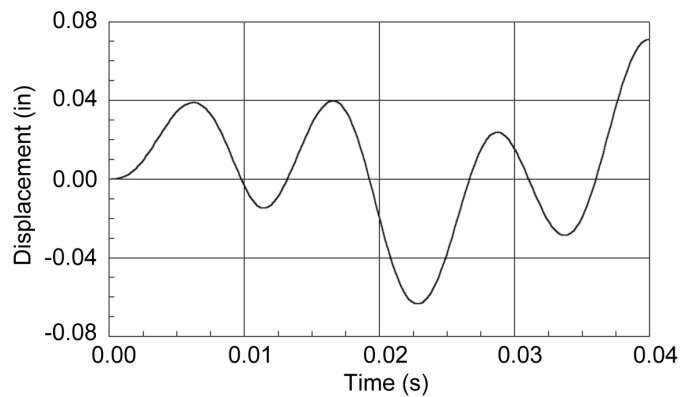


Figure VNT3-3: Deflection at the loading point

# VNT4: Large Lateral Deflection of Unequal Stiffness Springs

Source: Reference 2 (Problem VM9)  
Elements: Spring/damper element  
Keywords: Geometric nonlinearity, large deflection

A system consisting of two connected springs of unequal stiffness is subjected to the force  $F$  as illustrated in Figure VNT4-1. The displacements  $DX$  and  $DY$  are determined.

Model data:  
Spring stiffness  $K_1 = 8\text{ N/cm}$   
 $K_2 = 1\text{ N/cm}$   
Damper constant  $C_X = 1.41\text{ N}\cdot\text{sec/cm}$   
 $C_Y = 2.0\text{ N}\cdot\text{sec/cm}$

Load data:  
Force magnitude  $F = 5\sqrt{2}\text{ N}$

The solution is best obtained by using the ‘slow dynamics’ technique using discrete dampers in the X and Y directions to approximate discrete damping. This allows the structure to settle into the deformed position with no oscillatory response.

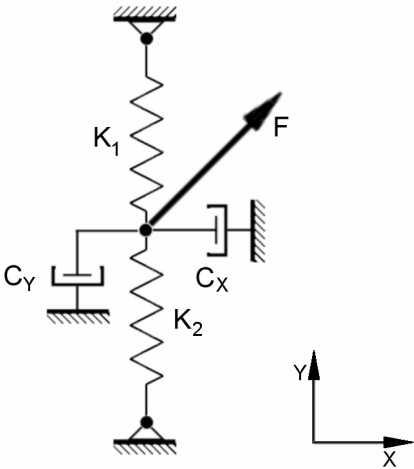


Figure VNT4-1: Unequal stiffness spring system

The nonlinear transient solver with no damping is used. The geometric nonlinear option is set.

Steps	Time Step (sec)	Save Every....
500	0.1	10

Table VNT4-1: Time stepping

A graph of displacement vs time for both the X and Y directions is shown in Figure VNT4-2.

	Theory	Reference 2	Straus7
$\Delta X$	8.631	8.633	8.632
$\Delta Y$	4.533	4.532	4.532

Table VNT4-2: Displacement result summary

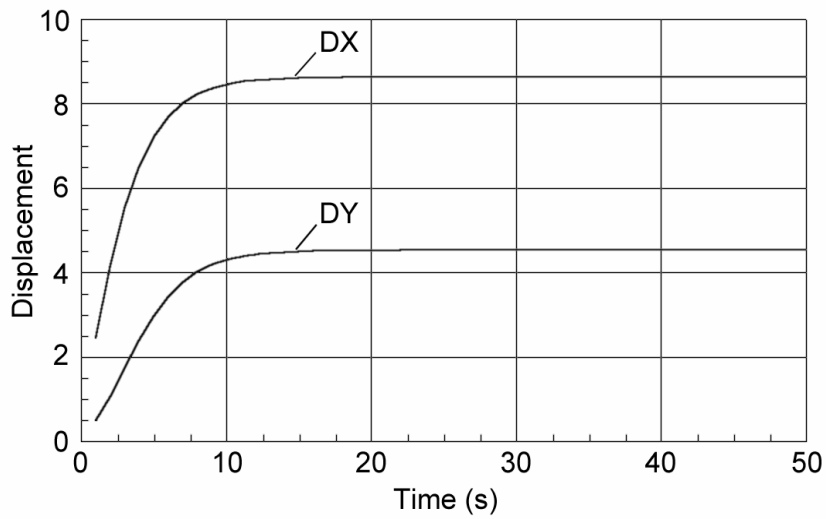


Figure VNT4-2: History of displacements

# VNT5: Large Rotation of a Swinging Pendulum

Source: Reference 2 (Problem VM91)  
Elements: Truss element  
Attribute: Point mass  
Keywords: Geometric nonlinearity, large rotation, large deflection

A pendulum consisting of a mass ( $m$ ) supported by a massless rod is released from rest as illustrated in Figure VNT5-1. The motion of the pendulum in terms of two components,  $DX$  and  $DY$  respectively is determined.

The pendulum is modelled using a single 100 in long truss element, with a translational mass assigned to the end node.

Model data:

Length of the rod	$L = 100\text{ in}$
Cross section area	$A = 0.1\text{ in}^2$
Young's modulus	$E = 30 \times 10^6\text{ psi}$
Node mass	$M = 0.5\text{ lb}\cdot\text{sec}^2/\text{in}$
Gravity acceleration	$G = -386\text{ in}/\text{sec}^2$

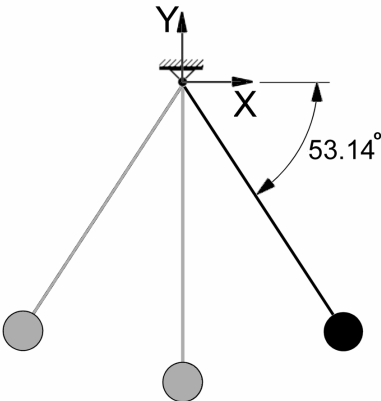


Figure VNT5-1: A swing pendulum

The nonlinear transient solver is used with the nonlinear geometry option set. Damping is not included. The time stepping scheme is shown in Table VNT5.

Steps	Time Step (sec)	Save Every....
1	0.002	1
30	0.105	1

Table VNT5: Time stepping

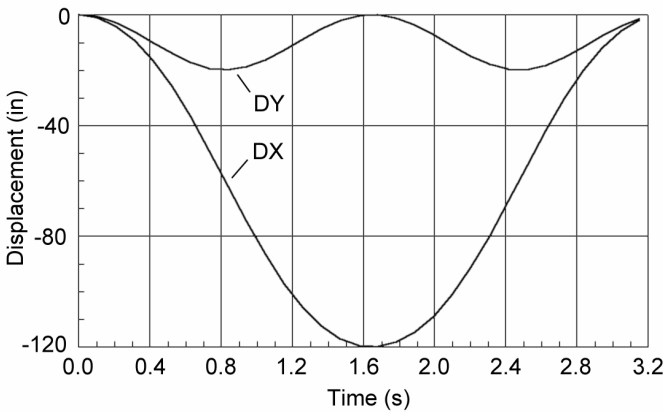


Figure VNT5-2: Displacement history

# VNT6: Large Rotation of a Beam Pinned at One End

Source: Reference 2 (Problem VM40)  
 Elements: Beam element  
 Keywords: Geometric nonlinearity, large rotation, large deflection

A massless beam pinned at one end is initially on a horizontal frictionless table as shown in Figure VNT6-1. A large rotation  $\theta$  is applied to the beam at the pin to give a full revolution at an angular speed  $\omega$ . The displacements  $DX$ ,  $DY$  at various positions of  $\theta$  are determined.

In the solution setup, the geometry nonlinearity option is set. Damping is not included. The time stepping scheme in Table VNT6-1 is used. The rotation at the pinned end is enforced with a nodal restraint and a linear load table is applied which increases from 0.0 to 1.0 in 0.15 seconds.

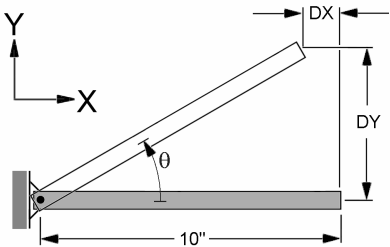


Figure VNT6-1: Pinned beam

Steps	TimeStep (sec)	Save Every...
24	0.00625	1

Table VNT6-1: Time stepping

Step	$\theta_z$ (deg)	Component	Target	Straus7
4	60	$\delta_x$ (in)	-5.0	-5.0
6	90	$\delta_y$ (in)	10	10
12	180	$\delta_x$ (in)	-20	-20
14	210	$\delta_y$ (in)	-5.0	-5.0
21	315	$\delta_x$ (in)	-2.93	-2.93
24	360	$\delta_y$ (in)	0.0	0.0

Table VNT6-2: Displacement results

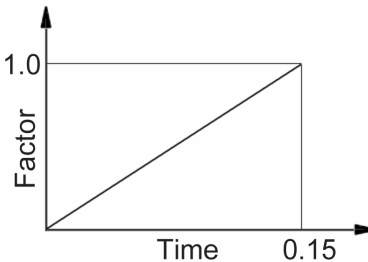


Figure VNT6-2: Load table

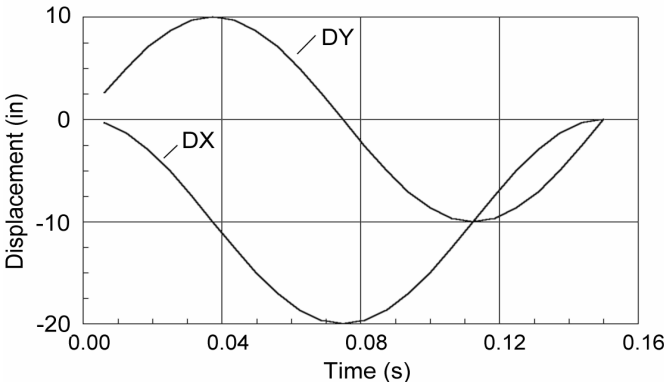


Figure VNT6-3: Displacement history curves

## References

1. *MSC NASTRAN Handbook for Non-Linear Analysis*, The MacNeal-Schwendler Corporation, L.A., August 1991.
2. *ANSYS Verification Manual*, Swanson Analysis Systems, Inc. 1993.



**CHAPTER 9****Steady State Heat Transfer**





# VSH1: 1D Heat Transfer with Radiation

Source: Reference 1 (Test No T2)  
Element: Beam and 2D plate heat elements  
Attributes: Fixed temperature  
Keywords: Radiation, ambient temperature

A temperature of 1000 K is prescribed at point A. Radiation to ambient temperature is applied at point B with no flux perpendicular to AB. The mesh has 10 uniform elements along the length.

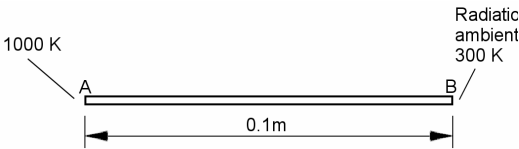


Figure VSH1: A 1D heat transfer problem

Material data:

Conductivity 55.6 W/m K  
Specific heat 460.0 J/kg K  
Density 7850 kg/m<sup>3</sup>  
Emissivity at B 0.98

Target value:

The steady state temperature at point B - 927K

Due to the radiation, the solution of this test requires the selection of the nonlinear option.

Mesh	Beam Element	Plate Element				
		TRI3	QUAD4	TRI6	QUAD8	QUAD9
Result	927.0	927.0	927.0	927.0	927.0	927.0

Table VSH1: Summary of results for temperature at point B

# VSH2: 2D Heat Transfer with Convection

Source: Reference 1 (Test No T4)  
 Elements: Plate and 3D solid elements  
 Attributes: Fixed temperature, ambient temperature  
 Keywords: Convection, insulated boundary

A temperature of 100 °C is fixed at the edge AB. The edge DA is insulated (zero heat flux) while edges BC and CD are subjected to convection to ambient temperature of 0°C. The temperature at point E is determined.

Material data:

Conductivity 52.0 W/m °C  
 Convective heat transfer coefficient 750.0 W/m<sup>2</sup> °C

Target value:

The steady state temperature at point E = 18.3 °C

In Reference 1, a mesh density of 3 (in the width direction) by 5 (in the height direction) is used. With such coarse meshes, the linear elements cannot produce accurate results. Refined meshes are also used, which have a mesh density of 6 by 10. For three dimensional brick elements, only one layer of elements is used in the thickness direction.

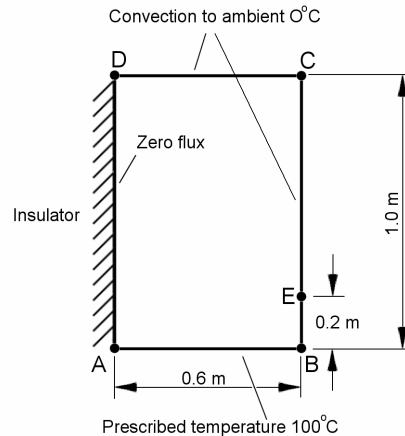


Figure VSH2: A 2D heat transfer problem

Element Type	Coarse mesh	Fine mesh
TRI3	13.799 (-24.6%)	17.28 (-5.57%)
QUAD4	8.500 (-53.6%)	17.95 (-1.91%)
TRI6	17.987 (-1.71%)	18.33 (0.16%)
QUAD8	17.895 (-2.21%)	18.79 (2.68%)
QUAD9	21.523 (17.6%)	18.40 (0.55%)
WEDGE6	13.799 (-24.6%)	17.28 (-5.57%)
HEXA8	8.500 (-53.6%)	17.95 (-1.91%)
WEDGE15	17.987 (-1.71%)	18.33 (0.16%)
HEXA16	17.895 (-2.21%)	18.79 (2.68%)
HEXA20	17.895 (-2.21%)	18.79 (2.68%)

Table VSH2: Summary of results for temperature at point E

# VSH3: 2D Steady State Heat Conduction and Convection

Source: Reference 2 (Example 3-7, page 111-114)  
 Elements: Plate and 3D solid elements  
 Attributes: Fixed temperature  
 Keywords: Convection, conduction

A composite material is embedded in a high-thermal conductivity material maintained at 400 °C. The upper surface is exposed to a convection environment at 30 °C with  $h = 25 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$ .

## Material data

For the composite

Conductivity 2.0 W/m °C  
 Density 2800 kg/m<sup>3</sup>  
 Specific heat 900 J/kg °C

For the high conductivity material

Conductivity 0.3 W/m °C  
 Density 2000 kg/m<sup>3</sup>  
 Specific heat 800 J/kg °C

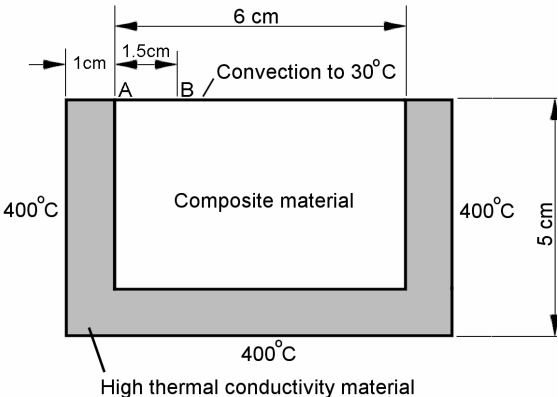


Figure VSH3: A 2D heat transfer problem

## Target values:

The temperatures at points A and B for the steady state condition (see TableVSH3)

Element type	Point A		Point B	
TRI3	249.95	(-1.96%)	246.01	(-0.66%)
QUAD4	249.21	(-2.25%)	246.02	(-0.65%)
TRI6	249.09	(-2.30%)	246.35	(-0.52%)
QUAD8	248.73	(-2.44%)	246.57	(-0.43%)
QUAD9	250.77	(-1.64%)	246.13	(-0.61%)
TETRA4 <sup>1)</sup>	250.14	(-1.89%)	245.78	(-0.25%)
PYRA5	249.31	(-2.22%)	246.03	(-0.66%)
WEDGE6	249.95	(-1.96%)	246.01	(-0.66%)
HEXA8	249.21	(-2.25%)	246.02	(-0.65%)
TETRA10 <sup>1)</sup>	249.07	(-2.31%)	246.33	(-0.53%)
PYRA13 <sup>1)</sup>	248.58	(-2.50%)	246.31	(-0.54%)
WEDGE15	249.09	(-2.30%)	246.35	(-0.52%)
HEXA16	248.73	(-2.35%)	246.57	(-0.41%)
HEXA20	248.73	(-2.44%)	246.57	(-0.43%)
Target value	254.956 °C		247.637 °C	

Table VSH3: Summary of results for temperature at points A and B.

<sup>1)</sup> Values for the tetrahedral and pyramid elements are calculated by averaging the values from the nodes through the thickness at the points A and B.

# VSH4: Steady State Heat Transfer in a Solid Steel Billet

Source: Reference 3 (Problem SOL-S-2)  
Elements: 3D brick elements  
Attributes: Fixed temperature  
Keywords: Forced convection, ambient temperature

The heat transfer in a solid steel billet is analysed. Fixed temperatures are applied on the two end surfaces, and forced convection on the other faces. Geometry data are shown in Figure VSH4.

Material data:  
Thermal conductivity 50 W/m °C  
Heat transfer coefficient 100 W/m<sup>2</sup> °C  
Ambient bulk fluid temperature 0 °C

Target value:  
Temperature at the point shown in Figure VSH4: 32.8 °C

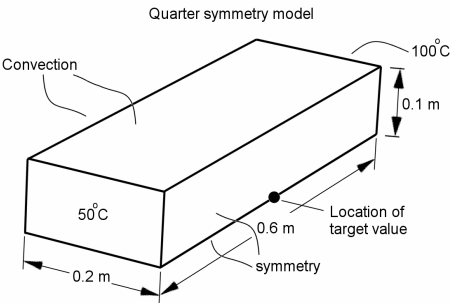


Figure VSH4: A solid steel billet

A quarter of the billet is modelled with 8 node and 20 node brick elements. Three mesh densities are used to check the solution convergence:  $2 \times 2 \times 2$ ,  $4 \times 4 \times 4$ ,  $8 \times 8 \times 8$ . The results are summarised in Table VSH4.

Mesh Density	$2 \times 2 \times 2$	$4 \times 4 \times 4$	$8 \times 8 \times 8$
HEXA8	29.35 (-10.5%)	31.23 (-4.8%)	32.17 (-1.9%)
HEXA20	31.59 (-3.7%)	32.45 (-1.1%)	32.44 (-1.1%)

Table VSH4: Summary of results

# VSH5: Steady State Heat Transfer through Building Corner

Source: BS EN ISO 10211-1: 1995 (Test Case -3)  
 Elements: 3D brick elements  
 Attributes: Ambient temperatures and convection coefficients  
 Keywords: Forced convection, ambient temperature

The heat transfer in a structure consisting of two walls meeting in a corner and a single floor is analysed. The boundary conditions applied are labelled with Greek letters  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  and  $\delta$ , see Figure VSH5-2 and Table VSH5-1. Results of interest are the temperatures at the six points labelled U to Z in Figure VSH5-1 and the heat loss/gain through  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$  surfaces shown in Figure VSH5-2.

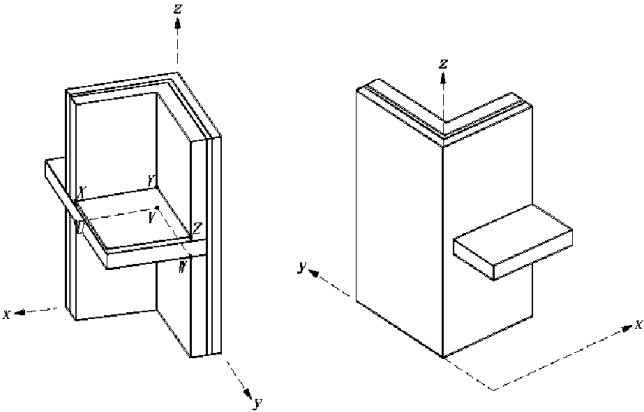


Figure VSH5-1: 3D Steady heat transfer problem

Material and Geometry data are shown in Figure VSH5-2.

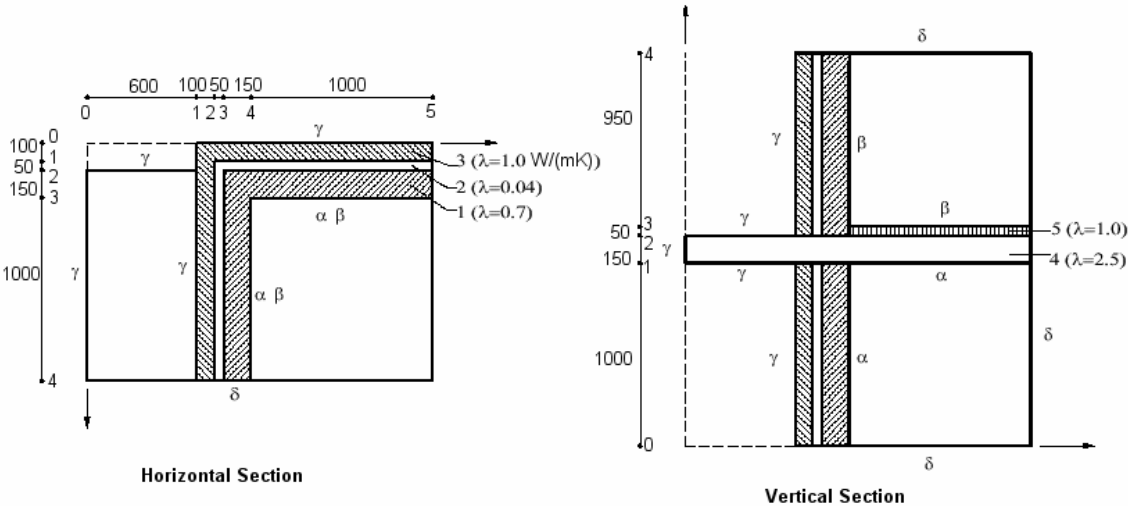


Figure VSH5-2: Horizontal and Vertical Sections showing geometry, material properties and boundary conditions (see Table VSH5-1 for further details).

Label	Boundary Condition
$\alpha$	$T = 20^{\circ}\text{C}$ , $R = 0.2 \text{ m}^2\text{K/W}$
$\beta$	$T = 15^{\circ}\text{C}$ , $R = 0.2 \text{ m}^2\text{K/W}$
$\gamma$	$T = 0^{\circ}\text{C}$ , $R = 0.05 \text{ m}^2\text{K/W}$
$\delta$	$Q = 0$ (Adiabatic)

Table VSH5-1 Boundary conditions (see Figure VSH5-2).

Target values:

Temperatures at the points shown in Figure VSH5-1:

$$\begin{array}{ll} U = 12.9^{\circ}\text{C} & X = 12.6^{\circ}\text{C} \\ V = 11.3^{\circ}\text{C} & Y = 11.1^{\circ}\text{C} \\ W = 16.4^{\circ}\text{C} & Z = 15.3^{\circ}\text{C} \end{array}$$

Heat flow through surfaces shown in Figure VSH5-2:

$$\begin{array}{l} \alpha = -46.3 \text{ J/s} \\ \beta = -14.0 \text{ J/s} \\ \gamma = 60.3 \text{ J/s} \end{array}$$

The building corner was modelled using linear and quadratic versions of the TETRA, WEDGE and HEXA brick elements. The number of elements employed in the two levels of mesh density that are used for checking solution convergence are shown in Table VSH5-2

Element Type	Coarse Mesh	Fine Mesh
TETRA	822	6576
WEDGE	274	2192
HEXA	137	1096

Table VSH5-2: Summary of element numbers for each level of mesh refinement.

The heat flow results were obtained by summing the node fluxes on the relevant surfaces. The results are summarised in Table VSH5-3 and Table VSH5-4.

Element	Temperature Results						Heat Flow Results		
	U	V	W	X	Y	Z	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
TETRA4	13.2 (0.3)	11.9 (0.6)	16.6 (0.2)	12.7 (0.1)	11.2 (0.1)	15.4 (0.1)	-50.7 (9.5%)	-14.9 (6.4%)	65.6 (8.8%)
TETRA10	11.9 (1.0)	11.5 (0.2)	16.4 (0.0)	12.4 (0.2)	11.0 (0.1)	15.3 (0.0)	-46.9 (1.3%)	-14.1 (0.7%)	60.9 (1.0%)
WEDGE6	12.9 (0.0)	12.1 (0.8)	16.5 (0.1)	12.3 (0.3)	11.5 (0.4)	15.3 (0.0)	-50.3 (8.6%)	-15 (7.1%)	65.4 (8.5%)
WEDGE15	12.8 (0.1)	11.6 (0.3)	16.4 (0.0)	12.4 (0.2)	11.1 (0.0)	15.2 (0.1)	-46.8 (1.1%)	-14.1 (0.7%)	60.9 (1.0%)
HEXA8	13.1 (0.2)	12.0 (0.7)	16.7 (0.3)	12.5 (0.1)	11.5 (0.4)	15.4 (0.1)	-49.3 (6.5%)	-14.7 (5.0%)	64.0 (6.1%)
HEXA20	12.9 (0.0)	11.5 (0.2)	16.5 (0.1)	12.5 (0.1)	11.2 (0.1)	15.3 (0.0)	-46.7 (0.9%)	-14.0 (0.0%)	60.7 (0.7%)

Table VSH5-3: Summary of results obtained from models using coarse mesh.

Element	Temperature Results						Heat Flow Results		
	U	V	W	X	Y	Z	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
TETRA4	13.0 (0.1)	11.5 (0.2)	16.5 (0.1)	12.5 (0.1)	11.0 (0.1)	15.3 (0.0)	-47.7 (3.0%)	-14.3 (2.1%)	62.1 (3.0%)
TETRA10	12.9 (0.0)	11.5 (0.2)	16.4 (0.0)	12.5 (0.1)	11.1 (0.0)	15.3 (0.0)	-46.3 (0.0%)	-13.9 (0.7%)	60.2 (0.2%)
WEDGE6	12.8 (0.1)	11.7 (0.4)	16.5 (0.1)	12.3 (0.3)	11.1 (0.0)	15.3 (0.0)	-47.6 (2.8%)	-14.3 (2.1%)	61.9 (2.7%)
WEDGE15	12.9 (0.0)	11.5 (0.2)	16.4 (0.0)	12.5 (0.1)	11.1 (0.0)	15.2 (0.1)	-46.3 (0.0%)	-13.9 (0.7%)	60.2 (0.2%)
HEXA8	13.0 (0.1)	11.6 (0.3)	16.6 (0.2)	12.5 (0.1)	11.3 (0.2)	15.3 (0.0)	-47.2 (1.9%)	-14.2 (1.4%)	61.3 (1.7%)
HEXA20	12.9 (0.0)	11.4 (0.1)	16.4 (0.0)	12.5 (0.1)	11.2 (0.1)	15.3 (0.0)	-46.3 (0.0%)	-13.9 (0.7%)	60.2 (0.2%)

Table VSH5-4: Summary of results obtained from models using fine mesh.



## References

1. J. Barlow, G. A. O. Davis, *Selected FE Benchmarks in Structural and Thermal Analysis*, NAFEMS, Glasgow, UK, October 1987.
2. J. P. Holman, *Heat Transfer* (S.I. metric edition), McGraw-Hill, 1989
3. R. W. Lewis, 'First 3-D Heat Transfer Benchmarks Completed', *Benchmark*, July 1990, p 9-12.

## CHAPTER 10

# Transient Heat Transfer



# VTH1: 1D Transient Heat Transfer

Source:	Reference 1 (Test No T3)
Elements:	Beam and 2D plate elements
Attributes:	Fixed temperature, initial nodal temperature
Keyword:	Conduction

A bar with a uniform section is analysed. It is assumed that there is no flux perpendicular to its axis, AB. The temperature at the left end is fixed to 0°C, and the variation of the temperature at the other end is given by  $100 \sin(\pi t/40)$ . The initial temperature for all nodes is 0°C.

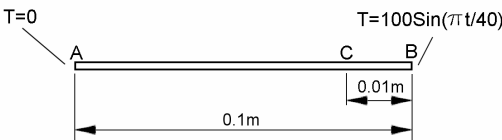


Figure VTH1: A 1D transient heat transfer problem

Material data:

Conductivity	1.0 W/m °C
Specific Heat	985 J/kg °C
Density	2300 kg/m <sup>3</sup>

Target value:

Temperature at point C at time = 58 secs - 9.62°C

Solution setup:

Time step	1 sec
Number of steps	58 sec
Nonlinear analysis	enabled

Both beam and two dimensional plate elements are used. The mesh suggested in the reference has 10 uniform elements along the length. The results with such meshes show that refined meshes are required to model the dramatic temperature change near point B. The suggested (coarse) meshes are refined in the length direction, and in the refined meshes twenty uniform elements are used along the length.

The numerical results are summarised in Table VTH1. For the beam element and linear plate elements, finer meshes are needed to get more accurate results due to the dramatic variation of temperature distribution near point B.

	Beam element	Plate element				
		TRI3 <sup>1)</sup>	QUAD4	TRI6 <sup>2)</sup>	QUAD8	QUAD9
Coarse mesh	2.60 (-73%)	0.07 (-99%)	2.60 (-73%)	13.47 (40%)	13.61 (41%)	13.61 (41%)
Fine mesh	11.39 (18%)	12.72 (32%)	11.39 (18.4%)	9.87 (2.60%)	9.74 (1.25%)	9.74 (1.25%)

Table VTH1: Summary of results

<sup>1)</sup> Reported values are those of the average of the temperature at the top and the bottom of the plate at point C.  
<sup>2)</sup> Reported values are those of the node at the middle of the plate at point C.

# VTH2: 2D Transient Heat Conduction and Convection

Source:	Reference 2 (Example 4-12, page 181-183)
Elements:	2D and 3D heat elements
Attributes:	Fixed temperature, ambient temperature, plate convection coefficient, brick convection coefficient, initial nodal temperature
Keywords:	Convection, conduction, insulator

A 1 cm by 2 cm ceramic strip is embedded in a high thermal conductivity material so that the sides are maintained at a constant temperature of 300 °C. The bottom face of the ceramic is insulated, and the top surface is exposed to a convection environment with an ambient temperature of 50 °C and convective heat transfer coefficient  $h = 200 \text{ W/m}^2\text{°C}$ . At time zero the ceramic is at a uniform temperature of 300 °C.

Material data:

Conductivity	3.0 W/m °C
Specific Heat	800 J/kg °C
Density	1600 kg/m <sup>3</sup>

Target value:

Temperature at point E at time = 12 secs - 243.32°C

Solution setup:

Time period	12 sec
Time step	2 sec
Nonlinear analysis	enabled

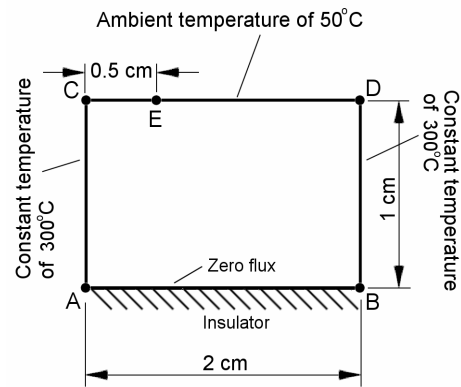


Figure VTH2: A 2D transient heat transfer problem

Mesh	Result		Mesh	Result	
TRI3	239.27	(-1.66%)	WEDGE6	239.27	(-1.66%)
QUAD4	238.21	(-2.10%)	HEXA8	238.21	(-2.10%)
TRI6	237.59	(-2.35%)	TETRA10 <sup>2)</sup>	237.02	(-2.59%)
QUAD8	237.31	(-2.47%)	PYRA13 <sup>2)</sup>	237.85	(-2.11%)
QUAD9	239.35	(-1.63%)	WEDGE15	237.59	(-2.35%)
TETRA4 <sup>1)</sup>	239.26	(-1.67%)	HEXA16	237.31	(-2.47%)
PYRA5	238.79	(-1.86%)	HEXA20	237.31	(-2.47%)

Table VTH2: Summary of results for temperature at point E, time=12 secs (Target value 243.32 °C)

<sup>1)</sup> Reported values are those of the average of the temperature at the front and the back surfaces of the bricks at point E.

<sup>2)</sup> Reported values are those of the node at the middle of the brick at point E.

# VTH3: Transient Heat Conduction with Heat Generation

---

Source:	Reference 2 (Example 4-15, page 190-192)
Elements:	2D and 3D heat elements
Attributes:	Ambient temperature, plate convection coefficient, brick convection coefficient, plate heat source, brick heat source, initial nodal temperature
Keywords:	Convection, conduction, heat generation

---

A plane wall has internal heat generation of 50 MW/m<sup>3</sup> and thermal properties of K=19 W/m°C, ρ=7800 kg/m<sup>3</sup> and c=460 J/kg°C. It is initially at a uniform temperature of 100°C and is suddenly subjected to the heat generation and convective boundary conditions.

The convective conditions are:  
 Side AC -  $h_{AC} = 400 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$ ,  $T_{\infty AC} = 120 \text{ } ^\circ\text{C}$   
 Side BD -  $h_{BD} = 500 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$ ,  $T_{\infty BD} = 20 \text{ } ^\circ\text{C}$

Target value:  
 Temperature at Point E at time = 9 sec - 190.7033°C

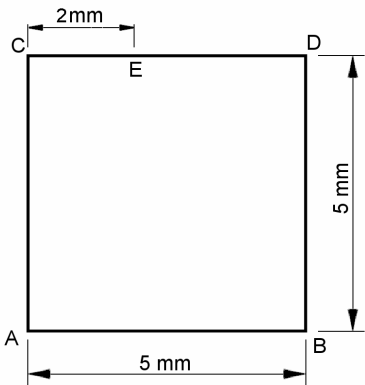


Figure VTH3: Transient conduction with heat source

Solution setup:  
 Time step                      0.09 sec  
 Number of steps            100  
 Nonlinear analysis        enabled

All two dimensional plate and three-dimensional brick elements are used in this test. The numerical results are summarised in Table VTH3.

Mesh	Result		Mesh	Result	
TRI3	190.45	(-0.14%)	WEDGE6	190.45	(-0.14%)
QUAD4	190.44	(-0.14%)	HEXA8	190.44	(-0.14%)
TRI6	190.43	(-0.14%)	TETRA10 <sup>2)</sup>	190.43	(-0.14%)
QUAD8	190.43	(-0.14%)	PYRA13 <sup>2)</sup>	190.44	(-0.13%)
QUAD9	190.43	(-0.14%)	WEDGE15	190.43	(-0.14%)
TETRA4 <sup>1)</sup>	190.44	(-0.13%)	HEXA16	190.43	(-0.14%)
PYRA5 <sup>1)</sup>	190.44	(-0.14%)	HEXA20	190.43	(-0.14%)

Table VTH3: Summary of results for temperature at point E, time=9 secs

---

<sup>1)</sup> Reported values are those of the average of the temperature at the front and the back surfaces of the bricks at point E.  
<sup>2)</sup> Reported values are those of the node at the middle of the brick. At point E.

# VTH4: Axisymmetric Transient Heat Conduction and Convection

Source:	Reference 2 (Example 4-1, page 143-144)
Elements:	Axisymmetric plate elements
Attributes:	Ambient temperature, plate convection coefficient, initial nodal temperature
Keywords:	Convection, conduction

A steel ball with a 5.0 cm diameter and uniform initial temperature of 450°C is suddenly placed in a controlled environment with a constant maintained temperature of 100°C. The convection coefficient is 10 W/m<sup>2</sup>°C. The temperature in the centre of the sphere at 5819 seconds is calculated.

Material data:

Conductivity	35 W/m °C
Specific Heat	460 J/kg °C
Density	7800 kg/m <sup>3</sup>

Target value:

Temperature at the sphere centre at 5819 seconds - 150 °C

Time steps:

Time step	58.19 sec
Number of steps	100
Nonlinear analysis	enabled

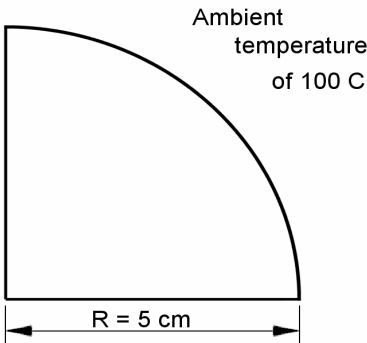


Figure VSH4: A steel ball

Axisymmetric elements are used to model the ball. The results are summarised in Table VTH4.

Mesh	TRI3	QUAD4	TRI6	QUAD8	QUAD9
Coarse Mesh Result	148.67 (-0.89%)	148.67 (-0.89%)	150.51 (0.34%)	150.51 (0.34%)	150.51 (0.34%)
Fine Mesh Result	149.92 (-0.05%)	149.92 (-0.05%)	150.39 (0.26%)	150.39 (0.26%)	150.39 (0.26%)

Table VTH4: Summary of results for temperature at the centre of the sphere, time=5819 seconds

## References

1. J. Barlow, G. A. O. Davis, *Selected FE Benchmarks in Structural and Thermal Analysis*, NAFEMS, Glasgow, UK, October 1987.
2. J. P. Holman, *Heat Transfer* (S.I. metric edition), McGraw-Hill, 1989
3. D. R. Pitts and L. E. Sissom, *Theory and Problems of Heat Transfer* (Schaum's Outline Series), McGraw-Hill, New York, 1977.





# Index

## A

Actuator .....	94
Ambient temperature .....	231, 232, 242, 243, 244
Analytical solution	
beam on elastic foundation .....	33
buckling of bar spring system .....	45
built-in beam thermal stress problem .....	25
circular plate under normal pressure .....	29
continuous beam under LDL .....	23
equiaxial tension of a rubber membrane .....	121
footing on clay .....	129
frame with pin connections .....	30
harmonic response .....	188
lateral vibration of stretched string .....	173
rigid beam supported by wires .....	24
stretching of an orthotropic solid .....	31
vibration of a stretched membrane .....	171

## B

Beam attribute	
distributed load .....	23, 205
offset .....	35
pipe radius .....	36
rotational end-release .....	30, 139, 140
support .....	33, 179
Beam element .....	23
1D heat .....	231, 241
beam . 25, 30, 33, 46, 47, 59, 61, 63, 92, 94, 95,	
97, 101, 103, 105, 121, 123, 125, 139, 140,	
141, 142, 144, 170, 176, 178, 179, 183, 190,	
195, 197, 200, 201, 209, 211, 212, 221, 226	
cable .....	24
normal gap .....	95, 101, 103, 219

pipe .....	35, 36, 37, 38, 40, 177, 178
spring/damper .....	57, 94, 107, 173, 174, 188, 196,
198, 209, 219, 223	
takeup gap .....	107
thick beam .....	143, 183, 205
truss .....	24, 25, 26, 27, 45, 57, 65, 77, 94, 105, 121,
123, 125, 173, 225	
zero gap .....	101, 127, 219, 221
Beam model	
antenna .....	198
bar-spring system .....	45, 57
belt through a pulley .....	103
cantilever .....	47, 59, 61, 211
curved .....	92
with distributed support .....	179
with off-centre masses .....	176
cantilever column .....	200
continuous beam .....	23
eccentric compression .....	97
free circular ring .....	144
free square frame .....	141
heat transfer .....	231, 241
on elastic foundation .....	33
on lift-off supports .....	95
pin connection .....	30
pinned at one end .....	226
plane frame .....	30, 46, 139, 140, 197
rigid beam supported by wires .....	24
simply supported .....	183, 190
with rubber stopper .....	221
spring-mass system .....	188
stretched string .....	173
stringer .....	26
strut, shallow and deep .....	65
swinging pendulum .....	225

three disk system .....	174
three storey building .....	196
unequal stiffness springs .....	223
BEF (beam on elastic foundation) .....	33, 179
Boundary nonlinearity .....	95, 101, 103, 219, 221
Brick attribute	
convection coefficient .....	242, 243
heat source .....	243
surface pressure .....	8, 22, 31
Brick element .....	8, 9, 14, 22, 31, 72, 164, 166, 168
3D heat .....	232, 233, 234, 235, 242, 243
Brick model	
'solid' beam .....	164
annular plate .....	168
cylindrical structure .....	9
heat transfer .....	242, 243
square plate .....	166
steel billet .....	234, 235
thick elliptical plate .....	8
thick-walled cylinder .....	22
unit cube .....	72

## C

Cantilever	
beam buckling .....	47
column .....	200
curved beam .....	92
plate column .....	48
square membrane .....	159, 160
square plate .....	145, 146, 151
straight beam .....	15, 59, 61
tapered beam .....	26
tapered membrane .....	160
Z-section beam .....	6
Conduction .....	233, 234, 235, 241, 242, 243, 244
Contact analysis .....	101, 107, 219, 221
with friction .....	103
Convection .....	232, 233, 234, 235, 242, 243, 244
Coupling	
membrane and bending, between .....	51
torsional and flexural behaviour .....	142
Curved beam .....	18

## D

Diagram	
bending moment .....	23, 33

shear force .....	23, 33
Distorted mesh .....	<i>See</i> Mesh distortion
Duncan-Chang soil model .....	129, 131, 133

## E

Earthquake .....	196, 197, 200
Eccentric compression .....	97
Elastoplastic analysis .....	105, 108, 111, 113
Element load, non-consistent .....	8

## F

Footing	
circular, on clay .....	129
in sand .....	131
on sand .....	133
strip, on Mohr-Coulomb material .....	111
Forced convection .....	234, 235
Free	
annular membrane .....	161
cylinder .....	162
thin square plate .....	147
Freedom	
multiple freedom sets .....	13, 19, 51, 68, 70, 72, 74
Friction .....	103

## G

Gap element	
normal .....	95, 101, 103, 219
takeup .....	107
zero .....	101, 127, 219, 221
Geometric nonlinearity	
finite strain .....	65, 115, 116, 119, 121, 123, 125, 127
large deflection .....	59, 61, 63, 65, 92, 94, 96, 97, 98, 100, 115, 116, 119, 121, 125, 127, 217, 223, 225, 226
large rotation .....	225, 226
post-buckling .....	61, 97
snap-back .....	57

## H

Heat generation .....	243
Hinged cylindrical shell .....	100

**I**

Ill-conditioned matrix .....	170
Impulse load .....	211
Incompressible material.....	22
Insulated (boundary).....	232
Insulator.....	242
Isotropic hardening.....	68, 70, 72, 74, 105

**K**

Kinematic hardening .....	77, 105
---------------------------	---------

**L**

Laminate .....	51
Lift-off.....	95
Link	
master/slave .....	30, 77, 88, 107
rigid.....	24, 142
sector-symmetry .....	22, 29, 163, 168, 171
Loading	
base excitation .....	195, 196, 197, 200, 201
end moment .....	59
impulse .....	211
linearly distributed.....	23
normal pressure.....	7, 8, 10, 19, 29, 90
pure torque.....	6
self-weight.....	21
step load.....	205, 207, 208, 209, 212, 217
thermal.....	9, 12, 25, 77
uniformly distributed .....	205
wind .....	198
Locking	
due to incompressibility.....	22
membrane .....	5

**M**

Mass matrix	
consistent ....	139, 140, 141, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 154, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162
lumped	139, 140, 141, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 154, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162
Material	
Duncan-Chang model.....	129, 131, 133
incompressible .....	22

isotropic hardening.....	68, 70, 72, 74, 84
kinematic hardening .....	77
laminate .....	51
orthotropic .....	31
perfect plasticity .....	87, 88, 90
plasticity ..	68, 70, 72, 74, 77, 84, 105, 108, 111, 113
rubber .....	115, 116, 119, 121, 123, 125, 127
user-defined plate .....	32
Material nonlinearity	
hyperelasticity ....	115, 116, 119, 121, 123, 125, 127
plasticity	68, 70, 72, 74, 77, 84, 87, 88, 90, 105, 108, 111, 113
soil .....	129, 131, 133
Material reference system .....	31
Maximum deflection .....	195, 196, 200, 201
Maximum response force .....	197
Membrane model	
annular membrane .....	161
circular.....	12
elliptic.....	3
lateral vibration .....	171
ring .....	10, 11
square, cantilevered .....	159, 160
stretched circular .....	171
tapered, cantilevered.....	160
Mesh distortion.....	27, 49, 151
aspect ratio.....	19
skew.....	7, 15, 150, 157
taper.....	15, 18, 26
warping.....	17
Modal damping .....	205, 207, 208
Modulus of subgrade reaction .....	32, 33

**N**

Newmark $\beta$ method.....	212
Node attribute	
initial temperature.....	241, 242, 243, 244
prescribed deflection	13, 14, 57, 65, 68, 70, 72, 84, 105, 111, 113, 115, 116, 119, 121, 123, 127
prescribed temperature	231, 232, 233, 234, 235, 242
with time table.....	241
restraint in UCS	10, 11, 149, 158, 163, 164, 168
rotational mass.....	174, 176, 177, 178

temperature.....	25, 77, 94
translational mass.....	142, 176, 177, 188, 196, 197, 198, 209, 225
translational stiffness.....	45, 57
Nonlinear buckling.....	61, 97
Nonlinearity	
boundary.....	<i>See</i> Boundary nonlinearity
geometric.....	<i>See</i> Geometric nonlinearity
material.....	<i>See</i> Material nonlinearity

## O

Off-centre point mass.....	142
Orthotropic material.....	31

## P

Patch test	
bending.....	13
brick.....	14
cylindrical shell.....	4
membrane.....	13
Peak value.....	183, 184, 205, 207, 208, 209
Pin connection.....	30
Pipe model	
drill pipe.....	178
motor-generator.....	177
out-of-plane bending of a curved bar.....	36, 38
pipe under combined bending and torsion.....	35
Plate attribute	
convection coefficient.....	242, 243, 244
edge normal shear.....	15, 17, 18
edge pressure.....	3, 4, 10, 15, 22, 48, 49, 74, 87, 125, 129, 131
edge shear.....	15, 17, 18
face pressure.....	4, 7, 19, 29, 90, 207, 208
face support.....	32
heat source.....	243
pre-stress.....	50, 51, 53, 108
Plate element	
2D heat.....	231, 232, 233, 241, 242, 243
3D membrane.....	3, 10, 11, 12, 13, 98, 115, 116, 119, 171
axisymmetric.....	74, 87, 108, 129, 133, 162, 163
axisymmetric heat.....	244
plane strain.....	22, 68, 74, 84, 108, 111, 113, 127, 131
plane stress.....	3, 10, 11, 12, 13, 70, 88, 115, 159,

160, 161	
plate/shell.....	3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 21, 29, 32, 48, 49, 50, 51, 53, 90, 96, 100, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 154, 156, 157, 158, 171, 184, 186, 201, 207, 208, 217
shear panel.....	26, 27
user-defined.....	32
Plate model	
annular plate.....	149, 158, 159, 160
cantilever plate.....	145, 146
circular plate.....	29
column buckling.....	48
curved beam.....	18
cylinder.....	74, 162
footing in sand.....	131
footing on clay.....	129
footing on sand.....	133
heat transfer.....	231, 232, 233, 241, 242, 243, 244
hollow sphere.....	163
on elastic foundation.....	32
overlay model.....	88
rectangular membrane.....	98
rectangular plate.....	19
rhombic plate.....	150, 157
simply supported rectangular plate.....	50
skew plate.....	7
square.....	32, 90, 96
square plate.....	147, 148, 151, 154, 156
square, simply supported.....	184, 186
straight cantilever beam.....	15
thick cylinder.....	22, 87
twisted beam.....	17
Poisson's ratio	
orthotropic material.....	31
Power spectral density (PSD).....	198
Prescribed nodal deflection.....	<i>See</i> Node attribute
Prescribed temperature.....	231, 232, 233, 234, 235, 242, 243
Propagation.....	212

## R

Radial vibration.....	163
Radiation.....	231
Rayleigh damping.....	205, 207, 208
Repeated eigenvalues.....	139, 140, 141, 144

Response spectrum  
  acceleration ..... 196, 197, 200, 201  
  displacement ..... 195  
Rigid link ..... 24, 142  
Rigid punch ..... 84  
Rigid-body mode ..... 141, 144, 147, 161, 162, 166  
Rubber model  
  Mooney-Rivlin ..... 115, 116, 123, 125, 127  
  Neo-Hookean ..... 123  
  Ogden ..... 119, 121

## S

Scordelis-Lo roof ..... 21  
Secondary restraint ..... 154, 156  
Seismic ..... 195, 196, 197, 201  
Shallow spherical cap ..... 217  
Shear panel model  
  simply supported composite beam ..... 27  
  tapered cantilever beam ..... 26  
Shell model  
  cylindrical ..... 4, 21, 53, 100  
  hemispherical ..... 5  
  Scordelis-Lo roof ..... 21  
  spherical cap ..... 217  
Slab model ..... 201  
Snap-back ..... *See* Geometric nonlinearity  
Spring-mass system ..... 188  
Standard deviation value ..... 198  
Stiffening effect ..... 171, 173  
Stress  
  maximum beam bending stress ..... 35, 36, 38  
  maximum beam torsional shear stress ..... 35, 36, 38  
Stretched membrane ..... 171  
Stretched string ..... 173  
Subgrade reaction modulus ..... *See* Modulus of subgrade reaction  
Support  
  lift-off ..... 95  
Support on element  
  beam ..... 33, 179  
  plate face ..... 32  
Symmetric modes ..... 145

## T

Temperature distribution ..... 9

parabolic ..... 12  
Test  
  constitutive model ..... 68, 70, 72, 87  
  eigenvalue solver 139, 140, 141, 144, 147, 148, 161, 162, 166  
  ill-conditioning ..... 170  
  nonlinear equation solution ..... 88  
  structure orientation, effect of ..... 164  
Thermal expansion ..... 9, 77, 94, 171  
Thick beam ..... *See* Timoshenko beam  
Thick plate ..... 154, 156, 157, 158, 159, 160, 186  
Time table ..... 241  
Timoshenko beam ..... 143, 183, 205  
Toggle mechanism ..... 94  
Transverse shear deformation  
  beam ..... 143, 183, 205  
  plate 32, 154, 156, 157, 158, 159, 160, 186, 208  
Twisted beam ..... 17

## U

User-defined Coordinate System.. 10, 11, 149, 158, 163, 164, 168

## V

Vibration mode  
  anti-symmetric ..... 146  
  axisymmetric ..... 162, 168  
  lateral ..... 171, 173  
  radial ..... 163  
  symmetric ..... 145

## W

Wilson  $\theta$  method ..... 212

## Y

Yield criterion  
  Mohr-Coulomb ..... 108, 111, 113  
  von Mises ..... 68, 70, 72, 74, 84, 87, 88, 90

## Z

Z-section cantilever ..... 6



**Straus7 Software is developed at:**

Suite 1, Level 5, 65 York Street

Sydney NSW 2000 Australia

Tel +61 2 9264 2977

Fax +61 2 9264 2066

Email [info@strand7.com](mailto:info@strand7.com)





**ALLEGATO 04**

**MANUALE DI VALIDAZIONE DEL SOFTWARE**

**PARATIE PLUS**

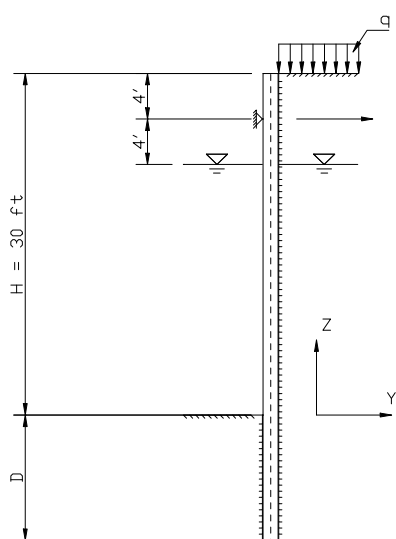
## Oggetto: ESEMPIO Q1 - CALCOLO A COLLASSO DI UN DIAFRAMMA MONOTIRANTATO

### Scopo

Dimostrare l'uso di PARATIE nella calcolo della profondità di infissione in condizioni di equilibrio limite.

### Descrizione del problema

Nell'esempio, tratto dal testo di Bowles (1988) (Esempio 13-6), si calcola, in condizioni di equilibrio limite, la profondità di infissione  $D$  di una paratia monotirantata.



**Figura** Errore. Nel documento non esiste testo dello stile specificato. **-1: Paratia problema**

**Q1**

**(da Bowles (1988))**

$f'$	$30^\circ$	angolo di attrito
$c'$	0	coesione
$g$	0.105 kcf	peso specifico secco
$g'$	0.066 kcf	peso specifico sommerso
$K_A$	0.297	coeff. di spinta attiva
$K_P$	6.100	coeff. di spinta passiva (valore corrispondente a $d=20^\circ$ , calcolato con le formule di Coulomb)
$q$	0.5 ksf	sovraccarico

**Dati del problema**

	<p>unità di misura anglosassoni</p> <p>La soluzione di Bowles è <math>D=8.5 \text{ ft}</math></p>
--	---

### Approccio al problema con PARATIE

L'analisi di una struttura in condizioni di equilibrio limite è un utilizzo anomalo di un programma di analisi elastoplastica incrementale: infatti la logica su cui si basa PARATIE non è in generale efficiente nell'affrontare lo studio di strutture prossime al collasso: per questo tipo di analisi è necessario ricorrere a tecniche sofisticate non implementate nel codice.

È tuttavia possibile, in prima approssimazione, valutare il confine esistente tra configurazioni ammissibili e collasso; in altre parole, si può riconoscere indirettamente se una parete sta per crollare, anche se non è sempre possibile conoscere il vero e proprio meccanismo di rottura.

Diversi possono essere gli indicatori di una situazione a rischio.

- A. A collasso, la matrice di rigidezza di una struttura non è più definita positiva: uno o più termini diagonali, durante l'inversione della matrice del sistema risolvete, divengono nulli o negativi. PARATIE intercetta questa situazione ed arresta l'analisi.
- B. Altre volte, la soluzione non è raggiunta con il numero massimo di iterazioni ammesse.

C. Altre volte ancora, una soluzione viene raggiunta, ma gli spostamenti non sono ragionevoli.

Avvalendosi di questi segnali, per una parete a mensola o monotirantata, è possibile determinare la lunghezza minima di infissione come la lunghezza al di sotto della quale non sono possibili condizioni di equilibrio compatibili con la resistenza attiva e passiva del terreno.

Il coefficiente di sicurezza della parete può essere quindi visto come:

Infissione effettiva

$$F_s = \frac{\text{Infissione effettiva}}{\text{Infissione minima}}$$

Infissione minima

Con PARATIE, questo tipo di problemi può essere affrontato nel seguente modo:

- si analizza, per fasi successive, il reale processo realizzativo della struttura, la cui configurazione geometrica deve coincidere con quella reale;
- si studiano, a partire dalla configurazione finale, fasi "fittizie" nelle quali vengono rimossi elementi di paratia al di sotto di una determinata quota;
- si definisce lunghezza di infissione minima la lunghezza prevista nel passo che precede il raggiungimento del collasso.

Per impostare il calcolo con PARATIE, è necessario definire altri dati che, di fatto, non influenzeranno il risultato finale. Questi dati sono:

coeff. di spinta a riposo:  $K_0=0.500$

moduli elastici del terreno:  $E_{vc}=100 \text{ kg/cm}^2$

$E_{ur}=150 \text{ kg/cm}^2$

spessore della parete: 40 cm

modulo elastico del materiale di cui è fatta la parete:  $E=300000 \text{ kg/cm}^2$

L'analisi incrementale è organizzata nei seguenti step:

step	descrizione	quota fondo scavo Z [ft]	D [ft]
1	condizioni iniziali, con fondo scavo coincidente con piano campagna. La parete è infissa nel terreno per 11 piedi. Il tirante è simulato con un appoggio fisso.	+30	11
2	scavo dei primo 10 piedi di terreno	+20	11
3	scavo di ulteriori 10 piedi di terreno	+10	11
4	scavo di ulteriori 10 piedi di terreno, fino a raggiungere la quota di fono scavo finale	0	11
5	rimozione progressiva di porzioni profonde di parete.	0	10
6	come sopra	0	9
7	come sopra	0	8.5
8	come sopra	0	8
9	come sopra	0	7.5

Durante tutte le fasi la quota di falda nel terreno è mantenuta costante sia a monte che a valle, anche quando la quota della freatica è superiore alla quota del fondo scavo: lo scavo quindi avverrà sott'acqua, in accordo con l'esempio in letteratura.

Affinchè PARATIE non ignori il parametro ZCUT con il quale è possibile assegnare la quota al di sotto della quale eliminare le porzioni di parete, è necessario attivare l'opzione "Find Safety Factor" (attraverso la checkbox apposita nella dialog box degli step)

Assegniamo infine una densità di mesh pari a 0.5 ft.

#### Commento ai risultati

La soluzione presentatata da Bowles è  $D=8.5$  ft.

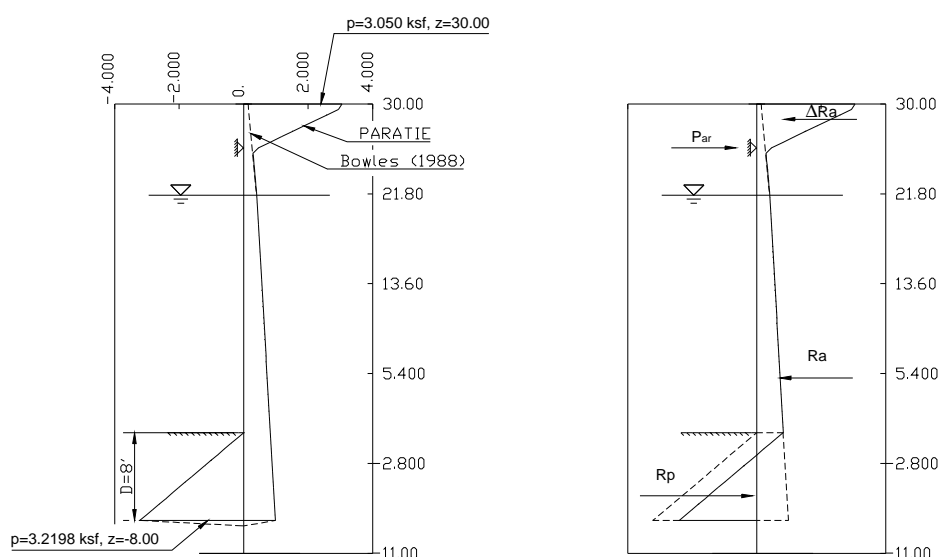
PARATIE ottiene una soluzione convergente fino allo step 8, in cui  $D=8$  ft. Teniamo però presente che la suddivisione in elementi era stata fatta con un passo  $\Delta=0.5$  ft: ciò significa che l'ultimo elemento in basso non rimosso può avere un'area di competenza pari a 0.5 ft. La lunghezza effettiva di infissione messa in conto nel passo 8 può quindi essere leggermente maggiore di 8 ft, e precisamente pari a  $8+\Delta/2$  (al massimo); si può quindi assumere  $D=8+0.25=8.25$  ft.

Poichè al passo successivo, in cui non è stata raggiunta la convergenza, si prevede una profondità di infissione pari a 7.5 (+0.25 ) ft, si può ritenere che la lunghezza minima di infissione sia compresa tra 8.25 e 7.75. Questo è il valore da confrontare con la soluzione di Bowles.

Se, d'altra parte, riteniamo già inaccettabile la configurazione allo step 8, a causa dei notevoli spostamenti evidenziati, dobbiamo ritenere che  $D$  sia compresa tra 8.75 e 8.25 ft. Quindi:

<b>criterio</b>	<b>PARATIE</b>	<b>soluzione esatta</b>
raggiungimento del collasso	$7.75 \leq D \leq 8.25$	$D=8.5$
eccessiva deformabilità	$8.25 \leq D \leq 8.75$	non disponibile

La differenza fra la profondità d'infissione stimata con PARATIE e quella prodotta dal calcolo a collasso è spiegabile. Dalla **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**, si osserva che PARATIE, a differenza delle ipotesi assunte nel calcolo manuale, mette in evidenza una porzione di terreno a monte, al di sopra del punto fisso, in cui il terreno è in spinta passiva piuttosto che in spinta attiva: tale differenza è congruente con la deformata della parete. La risultante  $DR_a$  della differenza fra le pressioni calcolate da PARATIE e le pressioni attive ipotizzate nel calcolo a rottura, fornisce, in questo caso, un contributo stabilizzante nei confronti della rotazione attorno al punto di vincolo. Pertanto una ridotta necessità di infissione è attendibile.



**Figura** Errore. Nel documento non esiste testo dello stile specificato. **-2: Diagramma delle pressioni efficaci orizzontali allo step 8 e schema delle risultanti che concorrono all'equilibrio limite della parete**

## Conclusioni

PARATIE è in grado di riprodurre schemi di calcolo classici basati sull'equilibrio limite.

Le differenze fra PARATIE e metodi classici sono spiegabili alla luce delle differenti ipotesi alla base dei due approcci.

Limitatamente a quest'esempio si ritiene opportuno rimarcare quanto segue:

1. nella scelta del coefficiente di spinta passiva  $K_p$  sono state adottate formule non conservative, come discusso nel Manuale Teorico;

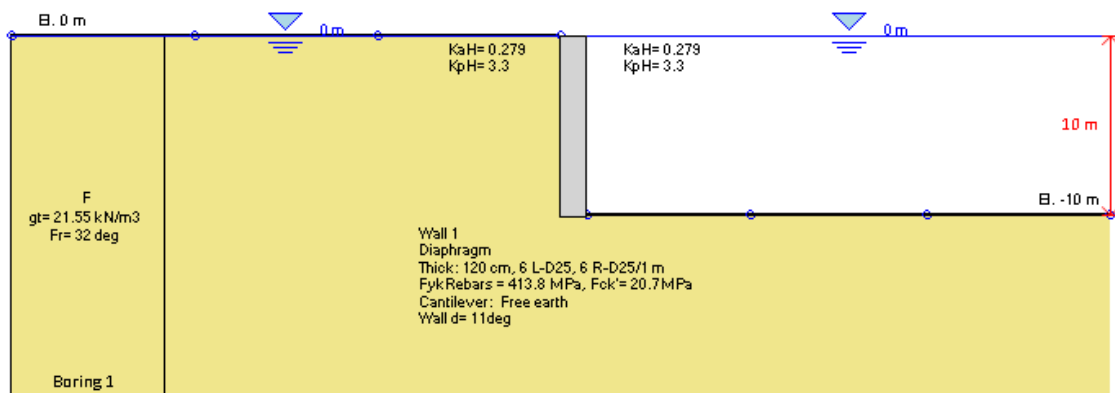
la profondità di infissione minima determinata secondo la procedura qui adottata va poi incrementata di un fattore  $> 1$  (tipicamente almeno 1.30) da stabilirsi caso per caso.



## Spinta sismica calcolata con metodo di Mononobe Okabe

Lo scopo del seguente test è semplicemente quello di calcolare la spinta sismiche sulla paratia utilizzando la teoria pseudo-statica di Mononobe Okabe, considerando condizioni differenti di permeabilità del terreno.

Si consideri un muro verticale che sostiene un rilevato piano alto 10 metri.



Le caratteristiche del terreno sono:

$$\gamma_{\text{sat}} = 21,55 \text{ kN/m}^3$$

$$\gamma_{\text{acqua}} = 10 \text{ kN/m}^3$$

$$\gamma_{\text{primo}} = 11,55 \text{ kN/m}^3$$

$$\text{teta (attrito terra muro)} = 11^\circ$$

$$\text{beta (inclinazione terreno)} = 0^\circ$$

$$f_i = 0 \text{ (per muri verticali).}$$

$$K \text{ (coeff. Permeabilit )} = 0,001$$

$$\text{Angolo\_attrito} = 32^\circ$$

$$r_u = 0$$

Quindi:

$$K_{a,\text{rank}} = 0,307$$

$K_{a,coul} (\theta = 11) = 0,279$

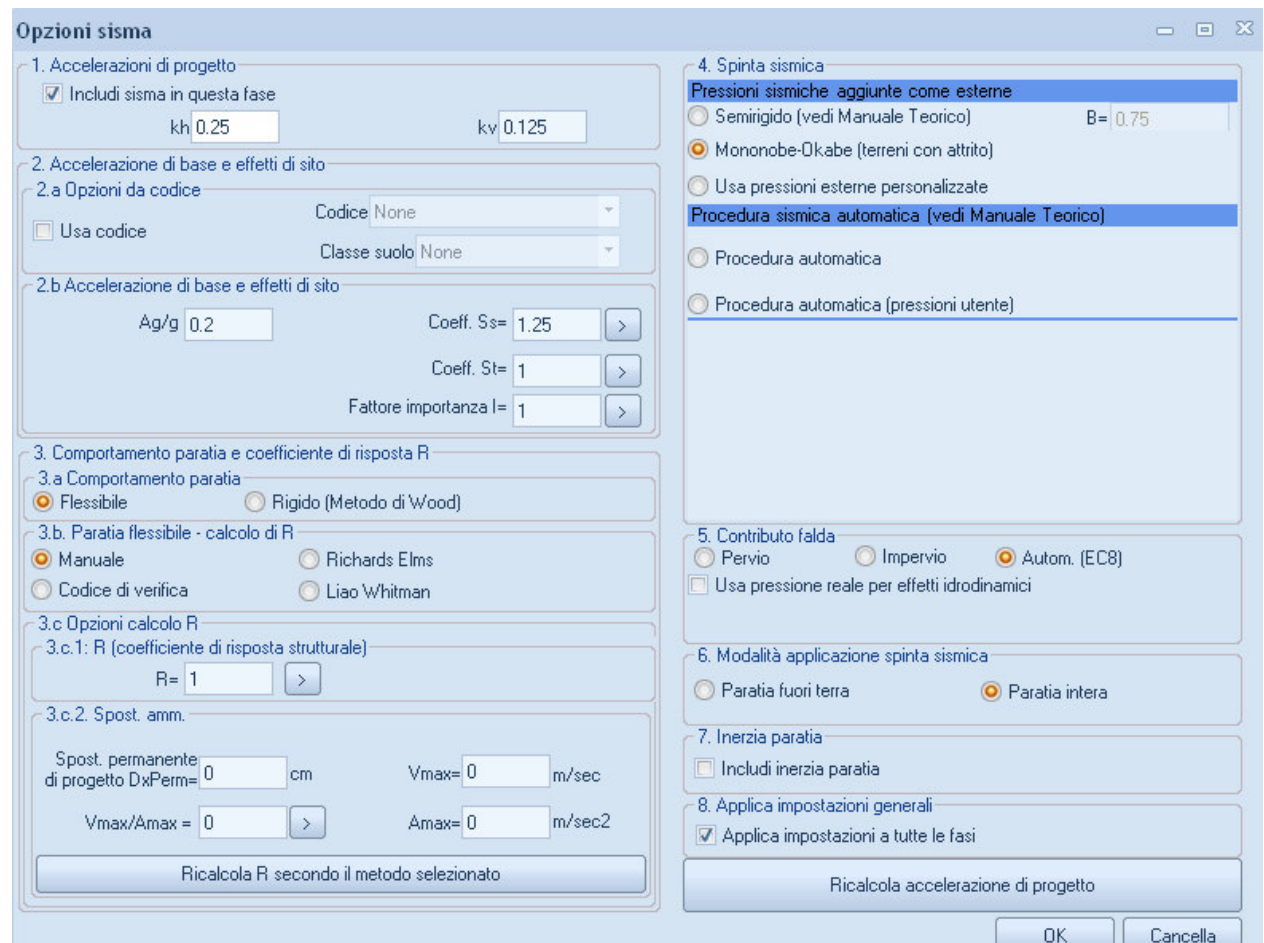
$\sigma_{v'} = \gamma_{primo} * H = 115,5 \text{ kPa}$

Le accelerazioni sismiche valgono:

$K_h = 0,25$

$K_v = 0,125$

Viene riportata di seguito la tabella di Paratie Plus riguardante le opzioni sismiche.



**Opzioni sisma**

1. Accelerazioni di progetto  
☒ Includi sisma in questa fase  
 $k_h$  0.25  $k_v$  0.125

2. Accelerazione di base e effetti di sito  
 2.a Opzioni da codice  
☐ Usa codice Codice: None Classe suolo: None  
 2.b Accelerazione di base e effetti di sito  
 $A_g/g$  0.2 Coeff.  $S_s$  1.25 Coeff.  $S_t$  1 Fattore importanza  $I$  1

3. Comportamento paratia e coefficiente di risposta  $R$   
 3.a Comportamento paratia  
☒ Flessibile ☐ Rigido (Metodo di Wood)  
 3.b. Paratia flessibile - calcolo di  $R$   
☒ Manuale ☐ Richards Elms ☐ Codice di verifica ☐ Liao Whitman  
 3.c Opzioni calcolo  $R$   
 3.c.1:  $R$  (coefficiente di risposta strutturale)  
 $R$  1  
 3.c.2. Spost. amm.  
 Spost. permanente di progetto  $D_{xPerm}$  0 cm  $V_{max}$  0 m/sec  
 $V_{max}/A_{max}$  0  $A_{max}$  0 m/sec<sup>2</sup>  
 Ricalcola  $R$  secondo il metodo selezionato

4. Spinta sismica  
 Pressioni sismiche aggiunte come esterne  
☐ Semirigido (vedi Manuale Teorico)  $B$  0.75  
☒ Mononobe-Okabe (terreni con attrito)  
☐ Usa pressioni esterne personalizzate  
 Procedura sismica automatica (vedi Manuale Teorico)  
☐ Procedura automatica  
☐ Procedura automatica (pressioni utente)

5. Contributo falda  
☐ Pervio ☐ Impervio ☒ Autom. (EC8)  
☐ Usa pressione reale per effetti idrodinamici

6. Modalità applicazione spinta sismica  
☐ Paratia fuori terra ☒ Paratia intera

7. Inerzia paratia  
☐ Includi inerzia paratia

8. Applica impostazioni generali  
☒ Applica impostazioni a tutte le fasi  
 Ricalcola accelerazione di progetto

OK Cancella

Dapprima si applica un'analisi nel caso di terreno dinamicamente permeabile (come in realtà è visto che  $K = 0,001$ ).

Quindi si considera, per il calcolo di  $\theta$ , un  $\gamma = \gamma_{primo}$  (peso del terreno immerso).

Si calcola, secondo le seguenti formule, un coefficiente di spinta attiva per il caso sismico (vedi manuale teorico).

$$K_{AE} = \frac{\cos^2(\varphi - \theta - \bar{\beta})}{\cos(\bar{\beta}) \cos^2(\theta) \cos(\delta + \theta + \bar{\beta}) \left[ 1 + \sqrt{\frac{\sin(\delta + \varphi) \sin(\varphi - \alpha - \bar{\beta})}{\cos(\delta + \theta + \bar{\beta}) \cos(\alpha - \theta)}} \right]^2}$$

$$K_{a,e} = 0,7543$$

La spinta sismica concentrata sul muro vale:

$$F_{eq} = ((1 - a_y) * \sigma_v' * K_{a,e} * H/2) * \cos(\theta) - (\sigma_v' * K_{coul} * H/2) = 213,03 \text{ kN}$$

La spinta sismica concentrata si può considerare come una pressione distribuita sul muro a trapezio (vedi manuale).

$$q_{top} (\text{pressione in sommità del muro}) = 1,6 * F_{eq} / H = 34,08 \text{ kN/m/m}$$

$$q_{bot} (\text{pressione ai piedi del muro}) = 0,4 * F_{eq} / H = 8,52 \text{ kN/m/m}$$

La spinta idrodinamica vale:

$$q = 7/8 * a_x * \gamma_{acqua} * \text{radq}(z_w * H)$$

Quindi, considerando un asse di riferimento preso positivo se diretto verso il basso, si ha:

$$- z_w = 0 \text{ m} \quad q = 0 \text{ kN/m}^2$$

$$- z_w = 5 \text{ m} \quad q = 15,47 \text{ kN/m}^2$$

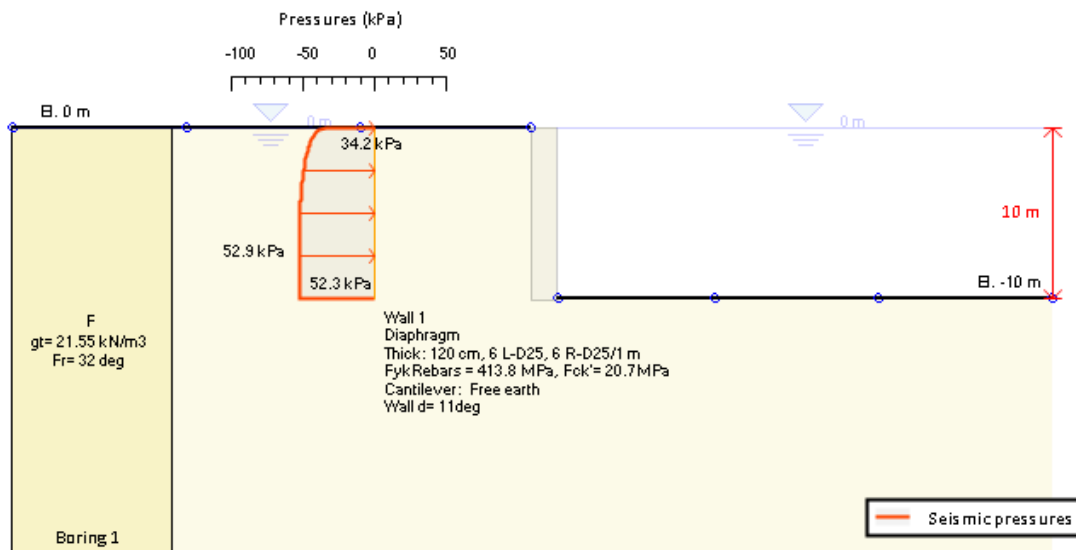
$$- z_w = 10 \text{ m} \quad q = 21,875 \text{ kN/m}^2$$

A questo punto si possono calcolare le pressioni totali come somma delle pressioni sismiche e delle pressioni idrodinamiche (considerate due volte).

$$z_w = 0 \text{ m} \quad q_{top} = 34,1 \text{ kN/m}^2$$

$$Z_w = 10 \text{ m} \quad q_{bot} = 52,27 \text{ kN/m}^2$$

Effettuando un'analisi con paratie plus si ottengono i seguenti valori:



Ora si provi ad effettuare una forzatura, ovvero a considerare il terreno come impervio anche se  $k < 10^{-5}$ .

In questo caso:

$$K_{a,e} = 0,9338$$

$$F_{eq} = 302,07 \text{ kN}$$

$$q_{top} = 48,33 \text{ kN/m}$$

$$q_{bot} = 12,08 \text{ kN/m}$$

Considerando le medesime pressioni idrodinamiche (ma considerate solo una volta) si ottengono le seguenti pressioni totali:

$$q_{top} = 48,33 \text{ kN/m}$$

$q_{bot} = 33,95 \text{ kN/m}$

